循環論證：循環從何起點談起？

黃毅英
退休數學教育工作者

楔子

事緣有前線老師社交應用程式「急 call」求救，說收到課程發展處數學教育組文件[2]，指出「在學習重點 21.3（理解等腰三角形的性質），學生須進一步理解並證明等腰三角形底角相等的性質。教師可讓學生認識由 *SAS* 證明等腰三角形底角相等。然而，由於在證明 *SSS* 是全等三角形的判別條件時須使用等腰三角形底角相等的性質，而使用圓規和無刻度直尺繪畫角平分線、垂直平分線和垂線（又稱垂直線）的作圖方法均須應用等腰三角形底角相等的性質，因此教師應避免諸如加入連接等腰三角形頂角和底邊中點的線段等方法以證明上述等腰三角形的性質，否則會引起循環論證。」（頁 42-43）。群組成員紛紛回應不知所措。他們慣用的從頂點作角平分線、連結底中點或垂足似乎都有問題[3]。

循環論證當然要避免，在不同文章[4]，包括本期蕭老師的文章，都有評論。但是「循環論證」只能在特定系統中談才有意義，正如伍鴻熙教授曾提過，雖然我們可以利用 *SAS* 足以推出 *SSS* 及 *ASA*，但其實我們三個都可假定為起點，然後推出餘下的兩個[5]。

---

2 課程發展處（2020）。《初中數學課程闡釋》。香港：作者。

3 假設底線 *BC* 的中點存在也有問題，因為在歐氏幾何「存在」等同於「可構作」。

4 如

陳鳳潔、黃毅英、蕭文強（1994）。教（學）無止境：數學學養教師的成長。載林智中、韓考述、何萬貫、文綺芬、施敏文（編）《香港課程改革：新時代的需要研討會論文集》（頁 53-56）。香港：香港中文大學課程與教學系。增訂版載黃毅英（編）（2005）。《迎接新世紀：重新檢視香港數學教育——蕭文強教授榮休文集》（頁 38-45）。香港：香港數學教育學會。

梁子傑、黃毅英、蕭文強（2008）。課程設計上的「古為今用」—— 以「截距定理」和「中點定理」為例。《數學教育》26 期，3-10。

5 見張家麟、黃毅英、林智中（2010）。學校幾何課程的重整——為何教和如何教演繹

於是乎我們必須要問，我們的課程是否說定了按照歐幾里得《原本》的公理系統（還是後來希爾伯特等系統）？那麼，我們是否要由《原本》的公理教起？如果我們接受學習初段（小學甚至初中）以直觀和實驗幾何為主，到轉到論證幾何時是否要推倒從來？如果不是，我們（包括學生）還有哪些幾何結果可假設的？於是我們便有以下一段假設性對話。

假設性情境

以下只是假設性情境，一般不會這麼麻煩，因為學生根本沒那麼 responsive！

老師如常興緻勃勃地走進課堂，和學生說：

師：你們知道甚麼是等腰三角形嗎？

生（齊答）：知道！

學生**小譚**[6]加了一句：小學學過了！

師：那麼你們知道等腰三角形有甚麼特別？

小譚：我知！兩條邊相等。

師：這只是定義？還有呢？

（靜默）

小浮[7]心想：定義和特性有甚麼分別呢？

師：你們再想想小學學過的東西？

小玲（另一**伶**俐同學）：底下兩隻角相等！

師：對呀！但我們怎樣知道和證明它們相等呢？

幾何？《數學傳播》34 卷第 3 期，13-33。

6 譚馬仕：skeptical **Thom**as。

7 浮：math-**ph**obiac。

小譚：我記得啦，小學時教我們把三角形對摺……

小玲：我也記起來了，摺成了的左右三角形相等……

小譚（急不及待）：用上一課教的 *SSS*……

師：你們都把小學學過的東西記得很好，我們今堂就是想嚴格的證明這件事。我們不可以用 *SSS*……

小譚：吓！上堂不是已證明了 *SSS*，點解唔用得？

師：上堂只是用一些活動說明一下，不算是嚴格證明，（洋洋得意地）就是透過今堂證出的等腰三角形特性才能反過來推出 *SSS* 的，所以今堂教的很重要！

小浮（心想）：快 D 入主題啦，做例題，我們之後做習作最直接！

小譚：我也搞糊塗了，究竟邊個推邊個先至啱呢？

師：古希臘人歐幾里得有個嚴謹的體系，我地而家一般都喺跟佢。

小浮（嘀咕）：Come on，而家喺 21 世紀香港，之前已經搞了個怪獸哥斯拉（畢達歌拉斯），而家又嚟個「鉤脷根」！

小玲：咁乜嘢用得，乜嘢唔用得？

老師正想回應，**小譚**搶着答：用對摺的方式，我們先從頂點連一條直線到底的中點。

師（心想：教育學院教的，要承學生問題接下去）：但你怎知中點存在呢？

小譚：兩點之間一定有中點吧？

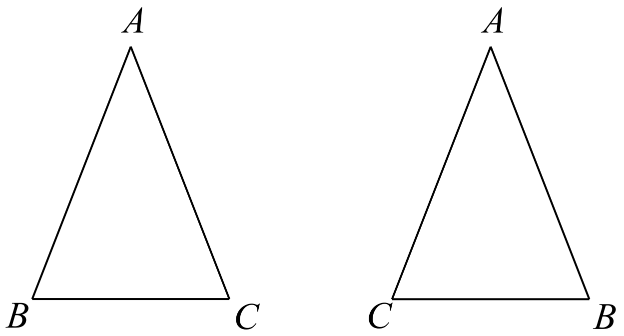
師：要畫到才算（這兒自己心裡一涼：這涉及尺規作圖——下一課才教！）

班房一片沉寂，開始有些同學議論紛紛，中點也不能假設存在？一點存不存在？一條線又存不存在？小浮的腦海已跑到九霄雲外，只希望老師快點

做數！老師唯有轉移話題，拉回正題：不如咁啦，暫時唔好問咁多，淨喺准用 SAS，不准作補助線……。

又是一片沉寂。

老師趁機在打開了電腦些已繪畫了 ABC 和鏡面反映的 ACB……一路證下來，還說這是 Pappus 巧妙的證明[8]。



$$\begin{array}{lrcll} & AB & = & AC & \\ & AC & = & AB & \\ & \angle BAC & = & \angle CAB & \\ \therefore & \Delta ABC & \cong & \Delta ACB & \text{(S.A.S.)} \\ \therefore & \angle ABC & = & \angle ACB & \text{(corr. } \angle\text{s, } \cong\Delta\text{s)} \end{array}$$

小譚，小玲及很多同學聽得津津有味，覺得幾何好像解偵探小說般有趣，從此更愛些數學堂。而小浮呢，心想，又多個 Pappus，如果沒有那麼多數學家，我就不用學那麼多數學了。

（真的有學生對我這樣說：要是沒有那麼多數學家，就不用學那麼多數學了！）以上雖說假設，相當真實，值得所有前線的數學教育工作者思考。

作者電郵：wongny@eduhk.hk

8 但它也有其他問題：https://en.m.wikipedia.org/wiki/Pons_asinorum。