# 等腰三角形底角相等的循環論證

馮德華
退休教師

筆者曾寫過一篇關於「循環論證」的文章《一個幾何證明的謬誤》[1]，引起老師的討論，估不到去年教育局出版《初中數學課程闡釋 2020》時，再次引起關注。

今次關注的是闡釋中第 46 至 47 頁的論述：

> 「在學習重點 21.3（理解等腰三角形的性質），學生須進一步理解並證明等腰三角形底角相等的性質。教師可讓學生認識由 SAS 證明等腰三角形底角相等。然而，由於在證明 SSS 是全等三角形的判別條件時須使用等腰三角形底角相等的性質，而使用圓規和無刻度直尺繪畫角平分線、垂直平分線和垂線（又稱垂直線）的作圖方法均須應用等腰三角形底角相等的性質，因此教師應避免諸如加入連接等腰三角形頂角和底邊中點的線段等方法以證明上述等腰三角形的性質，否則會引起循環論證。
>
> 學生須以等腰三角形底角相等的性質，及一般三角形的內角與外角性質，解三角形的未知角或證明包括三角形的全等關係等幾何問題。」


1 馮德華（2007）。「一個幾何證明的謬誤」。《數學教育》24 期，9-11。

「循環論證」是由命題 $p$ 出發，繞一圈之後，再去證明命題 $p$（即 $p \to q \to p$），即前題等於結論，自己證明自己，例如：

兩個賊人帶了三把手槍到銀行打劫，
賊人甲分得一把手槍，
而賊人乙分得兩把手槍。

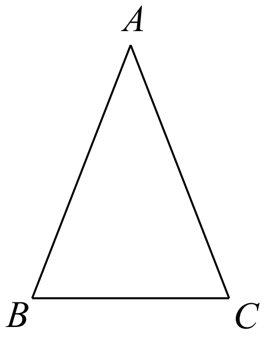
賊人甲：為甚麼你有兩把手槍？
賊人乙：因為我是你的領袖。
賊人甲：為甚麼你是我的領袖？
賊人乙：因為我有兩把手槍。
賊人甲：為甚麼你有兩把手槍？
賊人乙：因為我是你的領袖……

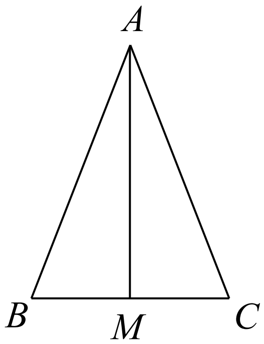
對話繞一圈之後，賊人乙仍未解釋他有兩把手槍或他是賊人甲的領袖的原因，這就是「循環論證」。

「在學習重點 21.3（理解等腰三角形的性質），學生須進一步理解並證明等腰三角形底角相等的性質。」

其實只要利用全等三角形關係，就可證明等腰三角形底角相等。但如果所使用的全等三角形關係是由等腰三角形底角相等得來，再去證明等腰三角形底角相等時，就會引起「循環論證」。

若 $\Delta ABC$ 為一個等腰三角形其中 $AB = AC$，證明兩底角相等（即 $\angle ABC = \angle ACB$）。



證明一 在 $BC$ 上作點 $M$ 使得 $M$ 為 $BC$ 的中點，連接 $AM$。

$AB = AC$ （已知）

$\angle ABC = \angle ACB$ （等腰三角形的兩底角相等）

$BM = CM$ （$M$ 為 $BC$ 的中點）

$\therefore$ $\Delta ABM \cong \Delta ACM$ （S.A.S.）

因此， $\angle ABC = \angle ACB$ （全等三角形的對應角）

甲：為甚麼 $\angle ABC = \angle ACB$？

乙：因為 $\Delta ABM \cong \Delta ACM$。

甲：為甚麼 $\Delta ABM \cong \Delta ACM$？

乙：因為 $\angle ABC = \angle ACB$。

甲：為甚麼 $\angle ABC = \angle ACB$？

乙：因為 $\Delta ABM \cong \Delta ACM$。……

留意乙所說的 $\Delta ABM \cong \Delta ACM$ 是由$\angle ABC = \angle ACB$（等腰三角形的兩底角相等）得來，再去證明$\angle ABC = \angle ACB$（等腰三角形的兩底角相等），所以乙就犯了「循環論證」。

「學生須以等腰三角形底角相等的性質，及一般三角形的內角與外角性質，解三角形的未知角或證明包括三角形的全等關係等幾何問題。」

那麼根據以上闡釋中的「須以等腰三角形底角相等的性質，…證明包括三角形的全等關係」的證明一，是否犯了「循環論證」呢？

筆者根據初中學生對等腰三角形（兩條邊長相等）及全等三角形關係證明（S.S.S.及 S.A.S.等）的認識，作出以下四個「等腰三角形底角相等」的證明，讓老師討論。

證明二 在 $BC$ 上作點 $M$ 使得 $M$ 為 $BC$ 的中點，連接 $AM$。

$AB = AC$ （已知）

$AM = AM$ （公共邊）

$BM = CM$ （$M$ 為 $BC$ 的中點）

$\therefore$ $\Delta ABM \cong \Delta ACM$ （S.S.S.）

因此， $\angle ABC = \angle ACB$ （全等三角形的對應角）

「教師應避免諸如加入連接等腰三角形頂角和底邊中點的線段等方法以證明上述等腰三角形的性質，否則會引起循環論證。」

證明二有否觸犯了闡釋中「循環論證」的論述呢？

「在證明 S.S.S.是全等三角形的判別條件時須使用等腰三角形底角相等的性質，而使用圓規和無刻度直尺繪畫角平分線、垂直平分線和垂線（又稱垂直線）的作圖方法均須應用等腰三角形底角相等的性質。」

用尺規作圖去構作一條線段的中點時，的確須要使用等腰三角形底角相等的性質，但證明二中只是在一條線段作一中點而已，在圖上作點並不須要使用等腰三角形底角相等的性質的，闡釋中的論述是否混淆了「作一中點的方法」及「中點的存在性」呢？一個普通初中學生對尺規作圖及歐幾里得《原本》公理系統（任何直線段必有中點，任何角必可平分）不甚瞭解，是否需要這樣苛刻的要求呢？

證明三 在 $BC$ 上作點 $D$ 使得 $AD$ 為$\angle BAC$ 的角平分線，連接 $AD$。

$AB = AC$ （已知）

$\angle BAC = \angle CAB$ （等分角）

$AD = AD$ （公共邊）

$\therefore$ $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ （S.A.S.）

因此， $\angle ABC = \angle ACB$ （全等三角形的對應角）

「教師可讓學生認識由 S.A.S. 證明等腰三角形底角相等。」

證明三是否依照以上闡釋所說的證明方法呢？

證明四 考慮 $\Delta ABC$ 及 $\Delta ACB$。

$AB = AC$ （已知）

$AC = AB$ （已知）

$BC = CB$ （公共邊）

$\therefore$ $\Delta ABC \cong \Delta ACB$ （S.S.S.）

因此， $\angle ABC = \angle ACB$ （全等三角形的對應角）

證明五 考慮 $\Delta ABC$ 及 $\Delta ACB$。

$$
\begin{array}{llll}
 & AB & = AC & （已知） \\
 & \angle ABC & = \angle ACB & （公共角） \\
 & AC & = AB & （已知） \\
\therefore & \Delta ABC & \cong \Delta ACB & （\text{S.A.S.}） \\
因此， & \angle ABC & = \angle ACB & （全等三角形的對應角）
\end{array}
$$

除非證明四及五中證明三角形的全等關係出錯，否則這兩個證明等腰三角形底角相等的方法應該是最完美了。

## 參考文獻

香港教育局課程發展處數學組（2020）。《初中數學課程闡釋》。香港：香港教育局。

作者電郵：twfung@alumni.cuhk.net