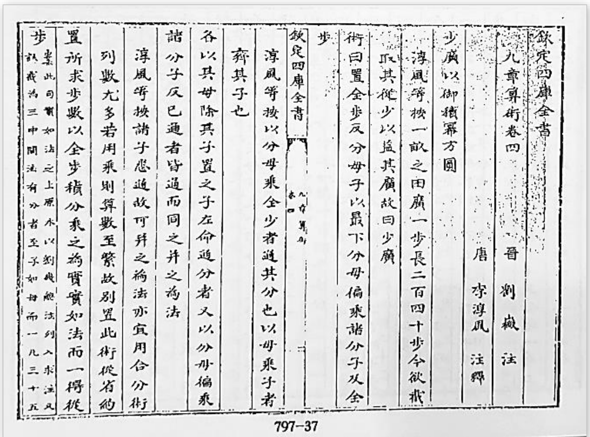
開平方根與恆等式的結合

楊鳳興
香港真光中學

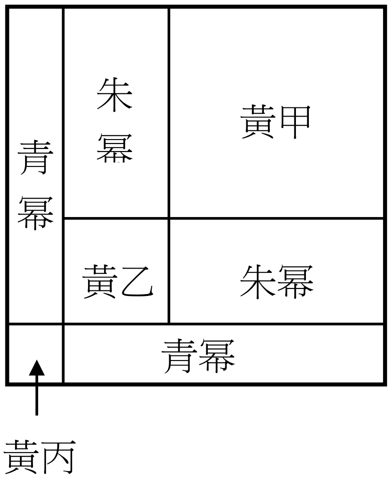
作為數學老師，其中一個最常被學生詢問的問題是：「數學有何用？」。最普遍答案相信是：「數學可以用來解決生活上的問題。」。為了證實數學的實用性，老師每遇上可以應用於情境上的公式或定理時，總會再三強調這些公式或定理的實用價值。誠然，數學有其實用的面向，而情境化和處境化題目確能引發同學學習動機。可是，當沒有「應用題」這個環節時怎麼辦呢？好像初中恆等式這個課題，除了操練外，倘若能加入一些文化元素，會否亦是一個提升學生動機的方法呢？

眾所周知，古代中國代數學成就輝煌。早在《九章算術》少廣章（見圖（一））已提出了完整開平方的方法，用以處理已知正方形面積，求邊長的問題。至北宋年間賈憲發明的「增乘開方法的胚型仍舊可以追溯到《九章算術》的開方術。」（大哉言數，1993）。錢寶琮亦提到解數字方程亦源自《九章算術》的開方術。「早在《九章算術》中便已有開平方及開立方等方法的記載。當時把方程的數值解法都統稱為『開方術』。意指這些解法是從開平方及開立方兩者一脈相承而推衍出來。」（中國數學史，1964）。由於少廣章所載之法（詳見《九章算術》少廣章第 12 至 16 題），其算理與籌算內容前人已多有研究，現筆者簡述如下：


欽定四庫全書
九章算術卷四　晉　劉徽　注
唐　李淳風　注釋
少廣以御積冪方圓
淳風等按一畝之田廣一步長二百四十步今欲截
取其從少以益其廣故曰少廣
術曰置全步及分母子以最下分母徧乘諸分子及全
步
淳風等按以分母乘全步者通其分也以母乘子者
齊其子也
各以其母除其子置之於左命通分者又以分母徧乘
諸分子反已通者皆通而同之并之為法
淳風等按諸子悉通故可并之為法亦宜用合分術
列數尤多若用乘則算數至繁故別置此術從省約
置所求步數以全步積分乘之為實實如法而一得從
步
797-37

圖（一）

從幾何角度，將一數開平方根，相等於求面積為該數的正方形的邊長。劉徽在《九章算術》所作的注，做法是先把正方形分成七份，包括三個稱為黃甲、黃乙及黃丙的正方形，及四個長方形。其中兩個長度相等於黃甲的邊長，闊度相等於黃乙的邊長的長方形，稱為朱冪。另外兩個長度相等於黃甲與黃乙的邊長之和，闊度相等於黃丙的邊長的長方形，則稱為青冪（見圖（二））。



圖（二）

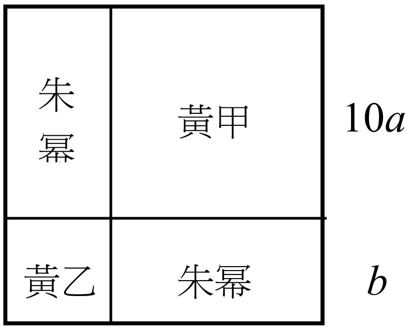
開平方根計算的次序是首先算出正方形黃甲的邊長，然後計算長方形朱冪的闊度，即正方形黃乙的邊長。由此再計算出長方形青冪的闊度，即正方形黃丙的邊長。最後黃甲、黃乙及黃丙的邊長總和便是原來正方形的邊長，亦即該數的平方根。遇上開方不盡的情況，可在整數開方根後面帶一個分數來表示所求開方數的近似值。劉徽介紹了「不加借算」和「加借算」兩種方法，這裏暫且略去。

然而如此精妙之法，如何與初中恆等式這個課題互相配合？為使讀者容易明白，筆者嘗試從兩個平方數的開平方根說起。

例一：求四位平方數的平方根

假設一個兩位數的十位數為 a，個位數為 b，則該數可寫成$10a+b$。因四位數的平方根必然是兩位數$10a+b$，這相等於算出面積為$(10a+b)^2$的正方形的邊長。

先把正方形分成四份（見圖（三）），首先計算出正方形黃甲的邊長，然後計算長方形朱冪的闊度，即正方形黃乙的邊長。最後黃甲及黃乙邊長之和便是原來正方形的邊長，亦即該數的平方根。



圖（三）

求四位數 1296 的平方根。

因四位數的平方根必然是兩位數，將之寫成$10a+b$，
那麼$(10a+b)^2=1296$。
設黃甲及黃乙的邊長分別為 $10a$ 及 b。
利用恆等式 $(10a+b)^2=(10a)^2+20ab+b^2$

$$=(10a)^2+(20a+b)b$$

步驟 1　先從個位數開始，將 1296 分成兩個兩位數的組別。即 12　96。
步驟 2　先求黃甲的邊長 $10a$。
找出一個最大的整數 a，使它的平方不大於第一組數 12。
因為 $3^2 \leq 12 < 4^2$，即 $a = 3$。
因此，黃甲的邊長為 $10 \times 3 = 30$，
而黃甲的面積為 $30^2 = 900$。
步驟 3　再求黃乙的邊長 b。
扣掉黃甲的面積 900，餘下面積為兩個朱冪及一個黃乙的面積的總和。

$$900+(20\times 3+b)b = 1296$$
$$(60+b)b = 396$$

由於 396 的尾數是 6，b 有兩個選擇，它可以是 4 或是 6。
因為 $64 \times 4 = 256$ 和 $66 \times 6 = 396$，所以 $b = 6$。
即黃乙的邊長為 6。
步驟 4　開方根過程結束，1296 的平方根是 $30 + 6 = 36$。

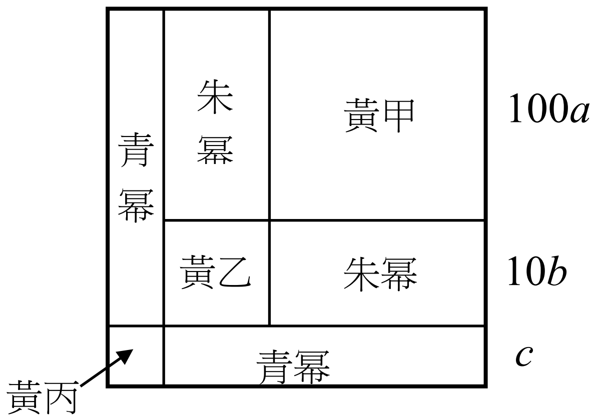
除了以幾何方法去理解和代數方法去展示，以下的直式會否又能引起一點興趣呢？

步驟 1 先從個位數開始，將數字 1296 分成兩個兩位數的組別。	$\sqrt{12 \vert 96}$
步驟 2 先看最左邊第一組數字（此例為 12）。 找出一個最大的整數 a，使它的平方不大於第一組數，然後把該數寫在平方根線上。 在此例子中，因為 $3^2 \leq 12 < 4^2$， 即第一個數字 $a = 3$。 把 3 寫在平方根線上，再將這數加以平方（此例為 $3^2 = 9$）， 並把它寫在第一組數之下。	$\begin{array}{l} \;\;3 \\ \sqrt{12 \vert 96} \\ \underline{\;\;9\;\;\;\;\;\;} \end{array}$
步驟 3 兩數相減後把下一組兩位數 96 移下來， 得 396。 把 20 乘以步驟 2 找到的數字（此例為 3）。 即 $20 \times 3 = 60$。 找出最大個位數 b 令 $(60 + b) \times b = 396$， 由於 396 的尾數是 6，b 有兩個選擇， 即 b 可以是 4 或是 6。 因為 $64 \times 4 = 256$ 和 $66 \times 6 = 396$， 即第二個數字 $b = 6$。	$\begin{array}{l} \;\;3 \\ \sqrt{12 \vert 96} \\ \underline{\;\;9\;\;\;\;\;\;} \\ \;\;3\;96 \end{array}$
步驟 4 把剛才求得的數字 6 寫在平方根線上， 並把乘積（$66\times6 = 396$）寫在最後一行。 兩者相減，餘數是 0。 因此，1296 的平方根是 36。	$\begin{array}{l} \;\;3\;6 \\ \sqrt{12 \vert 96} \\ \underline{\;\;9\;\;\;\;\;\;} \\ \;\;3\;96 \\ \;\;\underline{3\;96} \\ \;\;\;\;\;\;0 \end{array}$

例二：求五位平方數的平方根

假設一個三位數的百位數為 a，十位數為 b，個位數為 c，則該數可寫成$100a+10b+c$。因五位數的平方根必然是三位數$100a+10b+c$，這相等於計算出面積為$(100a+10b+c)^2$的正方形的邊長。

先把正方形分成七份（見圖（四）），首先計算出正方形黃甲的邊長，然後計算長方形朱冪的闊度，即正方形黃乙的邊長。再計算出長方形青冪的闊度，即正方形黃丙的邊長。最後黃甲、黃乙及黃丙的邊長總和便是原來正方形的邊長，亦即該數的平方根。



圖（四）

以少廣篇第 13 題為例：「有積二萬五千二百八十一步。問為方幾何？」用現代數學術語翻譯，即

「現在有一個正方形面積為 25281(平方)步，問正方形的邊長？」

換而言之，這是處理五位數 25281 開平方根的問題。
因五位數的平方根必然是三位數，將之寫成$100a+10b+c$，
那麼$(100a+10b+c)^2=25281$。
設黃甲、黃乙及黃丙的邊長分別為$100a$、$10b$及c。
利用恆等式

$$\begin{aligned}(100a+10b+c)^2 &= (100\mathrm{a})^2+(10\mathrm{b})^2+\mathrm{c}^2+2(100\mathrm{a})(10\mathrm{b})\\ &\quad +2(10b)c+2c(100a)\\ &= (100\mathrm{a})^2+100(20\mathrm{a}+\mathrm{b})\mathrm{b}+[20(10\mathrm{a}+\mathrm{b})+\mathrm{c}]\mathrm{c}\end{aligned}$$

步驟 1　先從個位數開始，將 25281 分成三個兩位數的組別。即 2　52　81。
倘若數字數目是單數，最左邊的一組可以只是一位數。

步驟 2　先求黃甲的邊長$100a$。
找出一個最大的整數 a，使它的平方不大於第一組數 2。
因為 $1^2 \le 2 < 2^2$，即 $a = 1$。
因此，黃甲邊長為 $100 \times 1 = 100$，
而黃甲的面積為 $100^2 = 10000$。

步驟 3　求黃乙的邊長$10b$。
扣掉黃甲的面積 10000，餘下面積為兩個朱冪、兩個青冪、一個黃乙及一個黃丙面積的總和。

$$(100a)^2 + 100(20a + b)b + [20(10a + b) + c]c = 25281$$
$$(100)^2 + 100(20 + b)b + [20(10 + b) + c]c = 25281$$
$$100(20 + \mathrm{b})\mathrm{b} + [20(10 + \mathrm{b}) + \mathrm{c}]\mathrm{c} = 15281$$
$$100(20 + \mathrm{b})\mathrm{b} + [20(10 + \mathrm{b}) + \mathrm{c}]\mathrm{c} = 15000 + 281$$

比較 15000 及$100(20 + b)b$，
找出一個最大的整數 b，使得$(20 + b)b$不大於 150。
因為$(20 + 5) \times 5 = 125 \le 152 < (20 + 6) \times 6 = 156$，即 $b = 5$。
因此，黃乙的邊長為 $10 \times 5 = 50$，
而兩個朱幂及一個黃乙面積的總和面積為 $150^2 = 12500$。

步驟 4　求黃丙的邊長 c。

$$100(20 + \mathrm{b})\mathrm{b} + [20(10 + \mathrm{b}) + \mathrm{c}]\mathrm{c} = 15281$$
$$100(20 + 5)5 + [20(10 + 5) + c]c = 15281$$
$$(300 + c)c = 2781$$

因為 $301 \times 1 = 301$ 和 $309 \times 9 = 2781$，所以 $c = 9$。
因此，25281 的平方根是 $100 + 50 + 9 = 159$。

我們不妨又看看直式如何表達？

步驟 1 先從個位數開始，將數字 25281 分成三個兩位數的組別。 倘若數字數目是單數，最左邊的一組可以只是一位數。	$\sqrt{2\|52\|81}$

步驟 2 先看最左邊第一組數字（此例為 2）。 找出一個最大的整數 a，使它的平方不大於第一組數 2，然後把該數寫在平方根線上。 在此例子中，因為 $1^2 \le 2 < 2^2$， 即第一個數字 $a = 1$。 把 1 寫在平方根線上，再將這數加以平方（此例為 1^2），並把它寫在第一組數之下。	1 $\sqrt{2\|52\|81}$ 1
步驟 3(a) 兩數相減後把下一組兩位數移下來， 得 152。 步驟 3(b) 把 20 乘以步驟 2 找到的數字 (此例為 1)。 即 $20 \times 1 = 20$。 找出最大個位數 b 令$(20 + b) \times b \le 152$， 由於 $25 \times 5 \le 152 < 26 \times 6$，所以 $b = 5$。 即第二個數字 $b = 5$。 把剛才求得的數字 5 寫在平方根線上， 並把乘積 $(20 + 5) \times 5 = 125$ 寫在最後一行。 兩者相減後把下一組兩位數移下來， 得 2781。	1 $\sqrt{2\|52\|81}$ 1 1 52 1 5 $\sqrt{2\|52\|81}$ 1 1 52 1 25 27 81
步驟 4 重複步驟 3(b)。 把 20 乘以找到的雙位數（此例為 15）， 即 $20 \times 15 = 300$。 找出最大個位數 c 令$(300 + c) \times c = 2781$， 由於 2781 的尾數是 1，$c$ 有兩個選擇， 即 c 可以是 1 或是 9。 因為 $301 \times 1 = 301$ 和 $309 \times 9 = 2781$，所以 $c = 9$。 即第三個數字 $c = 9$。 因此，25281 的平方根是 159。	1 5 9 $\sqrt{2\|52\|81}$ 1 1 52 1 25 27 81 27 81 0

這時候老師不妨挑戰一下對數學有興趣的同學 — 以上方法是否可以套用在任意平方數身上？

從以上例子可以看到，或許對一個已擁有計數機的初中學生而言，處理一個數的開平方根只代表按幾個鍵便能得出的結果，然而加入一些文化元素卻能讓學生不再單調地計算。同學們既可有機會欣賞古代中國數學的成果，亦可參與其中，利用自己在小學課程所學習到的平方數的性質，及初中學到的恆等式 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 這個課題去重新認識開平方根是怎麼一回事。此舉雖然未必能讓同學完全擺脫對恆等式那種重覆操練的印象，但是卻不失為一種眼界之拓展 — 讓古代數學知識，與代數學語言結合，形成一種內在和諧的微妙關係。一向以來，撰寫關於《九章算術》的文章甚多，討論開平方根與恆等式亦不少。本文旨在拋磚引玉，吸引更多好題材，彼此借鏡，讓學生能從多角度認識數學的特性。

參考文獻

李繼閔（1992）。《《九章算術》及其劉徽注研究》。台北：九章出版社。

葛瑞斯．摩爾（2006）。《數謎》。台灣：商周文化事業股份有限公司。

劉鈍（1993）。《大哉言數》。瀋陽：遼寧教育出版社。

錢寶琮主編（1964）。《中國數學史》。北京：科學出版社。

Shen, K.S., Crossley, J.N. & Lun, W.C.A. (1999). *The nine chapters on the mathematical art: companion and commentary*. Oxford: Oxford University Press.

作者電郵：fhyeung@gmail.com