從「數獨」到「讀數」[4]

蕭文強
香港大學數學系

大家都一定玩過，或者至少知道，有種叫做「數獨」〔Sudoku〕的消閒遊戲吧？近十餘年間，這項遊戲風靡一時，曾經一度每天都佔了各種中西報章的一個角落，好此道者，一天不玩都不安。後來不少出版社編製了「數獨」題集，並且配以五花八門的解題要訣，放滿書店的架上，備受大眾歡迎。

「數獨」的英文名字乃日語「數字は獨身に限る」的簡寫拼音，意思是「數字必須是單獨」。因為遊戲是把由 1 至 9 這些數字填進一個 9×9 方陣，使每行每列及組成九宮格的 3×3 子方陣中每一格的數字都是由 1 至 9 其中一個，且僅單獨一個。作為提示，某些方格的數字是已知的。

雖然「數獨」的名字充滿日本風味，它其實在西方誕生。在 1979 年美國紐約一本叫做 *Dell Pencil Puzzles and Word Games* 的雜誌上首次刊登這項填充遊戲，叫做 Number Places。在 1984 年有一間日本公司「株式会社ニコリ」〔Nikoli Company〕把遊戲發行，取用「數獨」這個名字。在 1997 年有位新西蘭籍的香港前法官高樂德〔Wayne Gould, 1945 -〕退休後編寫了一個自動生成「數獨」遊戲的電腦程序，為倫敦報章《泰晤士報》〔Times〕每天提供「數獨」題。《泰晤士報》在 2004 年 11 月 12 日開始刊登這項填充遊戲的題目，每天吸引了無數「數獨迷」，風頭蓋過了傳統報章上的英文填字遊戲，翌年春天這股狂熱返回到「數獨」的發源地美國！

英國友人威爾遜〔Robin James Wilson, 1943 -〕是著名的組合數學與圖論專家，2005 年 3 月他來香港大學作客數天，我們每天都晤談討論數學。當時他正迷上了「數獨」，每天找《泰晤士報》的「數獨」題來做，少做一

4 作者在 2015 年 6 月舉行的香港數學教育會議上作了以此為題的報告，本文是報告內容經大量刪節及增添後的修訂版。本文的部份內容節錄版，曾刊於「數多酷研習社」五周年誌慶的書上。

天也不安樂。有一次他把當天的「數獨」題交給我，告訴我這個填充遊戲如何吸引，叫我也試一試。我聽他的話，當晚回家做了，翌日向他交卷。但是，我可沒有就此迷上「數獨」，因為在破解過程中我明白到涉及的工夫不外邏輯推理，與我日常做數學要用到的工夫沒有兩樣。按部就班，總會得到答案；有時也許要多花一點時間，因為可能的選擇比較多，但沒有什麼驚喜可言！反而，這卻引起我對「數獨」能否輔助學習數學這項課題產生興趣。順帶提一句，Robin 寫了一本小書《如何解「數獨」：分步破解指引》〔*How to Solve Sudoku: A Step-by-Step Guide*〕，2005 年由 Infinite Ideas Co. Ltd. 出版，正是教人如何運用邏輯推理破解「數獨」題。

根據某些已經填上了數字的方格為提示，我們推理另外一些方格應該填上什麼數字。有時只有一個選擇，那就好辦；有時多於一個選擇，只好試試逐一填上。當我們發覺填上的數字導致填不下去，那便只好返回前一步，作出修改。數學上對這種步驟有項專門名詞，叫做回溯演算法〔back-tracking algorithm〕。因此，玩「數獨」應該用鉛筆，而且是附上橡皮擦子的鉛筆，以方便隨時作出修改。

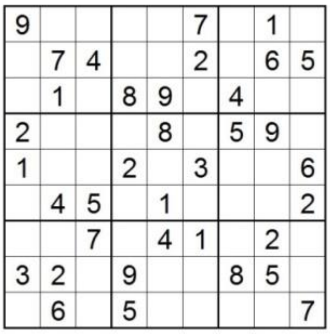

圖 1a

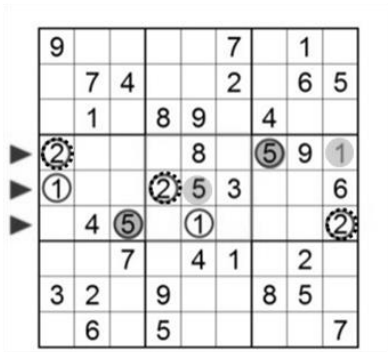

圖 1b

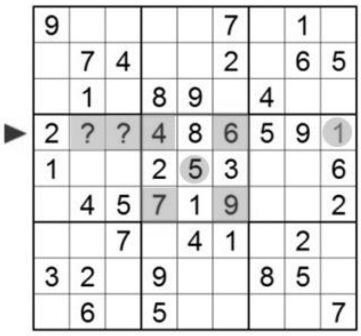

圖 1c

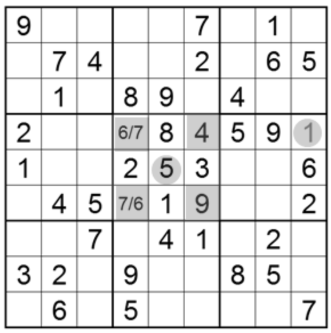

圖 1d

舉一個例子，設「數獨」題如圖 1a 所示。觀察第四行、第五行和第六行組成的三個九宮格內的已知數字 1、2、5 的分佈。三個 2 都出現了，但 1 和 5 卻只出現兩個，尚欠一個。由於 5 在最左面和最右面的九宮格都出現了，分別在第六行和第四行，餘下的 5 必須在中間的九宮格出現，而且必定在第五行。類似推理，餘下的 1 必須在最右面的九宮格出現，而且必定在第四行。因此，我們得到如圖 1b 所示的情況。觀察中間那個九宮格，數字 4 只能在左上角或右上角出現（為什麼？）假設我們把 4 填在中間那個九宮格的左上角，數字 9 便只能填在右下角，數字 7 只能填在左下角，數字 6 只能填在右上角，如圖 1c 所示（為什麼？）因此，第四行餘下的兩個空格必須填上 3 和 7，但問題產生了，因為第四行餘下的兩個空格都不能填上 7（為什麼?），矛盾！於是，我們只好用橡皮擦子清除左上角的 4，返回前一步，轉而把數字 4 填進右上角，然後推論下去，如圖 1d 所示。（當然，這不是唯一填上數字的方法，這兒只是舉例說明某些步驟而已。）

「數獨」風行的一個奇怪現象，是它著意標榜那不是數學遊戲。雖然填進方格的是數字，但完全沒有涉及這些數字的運算，不懂算術的朋友也可以玩，甚至把數字代以九個不同的符號亦無不可。果然，被「數獨」吸引過去的群眾當中，很多自認見到數學即拂袖而去，或者在學生時代把數學科視作畏途；他們似乎毫不意會到每天在玩「數獨」的時候，其實他們正在進行自己厭惡或者害怕的數學活動！

法國十七世紀著名劇作家莫里哀〔Molière (Jean-Baptiste Poquelin, 1622-1673) 在 1670 年 10 月 14 日演出一齣喜劇《貴人迷》〔Le Bourgeois Gentilhomme〕，其中主角汝爾丹先生〔Monsieur Jourdain〕是一位虛榮心重的愚蠢暴發戶，癡心妄想攀上貴族的地位，過貴族式的生活，於是拜師學習上流社會的時髦玩意。他與他的哲學教師有一段頗詼諧的對話，節錄如下〔譯本採自：李健吾譯，《莫里哀喜劇全集》，湖南文藝，1992 年。〕

P（哲學教師）：不是散文的，就是詩；不是詩的；就是散文。

J（汝爾丹先生）：那麼，一個人說話，又算什麼？

P：散文。

J：什麼？我說：「妮考耳，給我拿拖鞋來，給我拿我的睡帽來。」這是散文？

P：是啊，先生。

J：天啊！我說了四十多年散文，一點也不曉得；你把這教給我知道，我萬分感激。……

不少喜愛玩「數獨」的朋友，情況相似，他們不知道原來自己每天都做了數學，仍然以為自己厭惡或者害怕這門學科！

2005 年 5 月 28 日英國報章《金融時報》〔Financial Times〕刊登了一則由 Stephen Pincock 撰寫的文章，標題巧妙地寫成 「Count me in. The real puzzle behind Sudoku is the idea that maths doesn’t come into play. Well, the number crunchers will have the last laugh.」〔不容易通過中譯表達原文的巧妙意思，讓我不揣淺陋，譯作：「算我一份：『數獨』真正的迷思是數學不涉其中；然而，精於數學之徒將得到最後勝利。」〕文章引述倫敦大學瑪麗皇后學院〔Queen Mary College, University of London〕數學教授 Charles Leedham-Green 的話：「有一件事令我有點惱火，有人認為由於不用把『數獨』出現的數字相加，『數獨』便不算是數學。……思考如何解答一個『數獨』題是個數學問題，固然沒有人會認為那是高級數學，但尋找解答這些遊戲的技巧，本身是數學工作。」

導致這種對數學的誤解的主要原因，是課堂上的數學往往只著重計算，給學生灌輸各種不同的演算法則和技巧，但求學生能夠快速無誤獲得答案，有了正確答案便是達標了。至於數學活動當中的探索功夫、提出疑問、從實驗觀察作出歸納、按照邏輯推理作出演繹、提出猜想並試圖證明猜想成立或者找出反例、如此等等，往往忽略了。難怪不少學生覺得數學科既枯燥又專制，猶未嘗到數學的真正味道便厭惡或者害怕了這門學科。不少學生也以為數學就是計算，不作任何計算那算是數學呢？

這個奇怪現象令我想到「數獨」與「讀數」(學習數學)，是否有某些可資借助的互動關係？既然這麼多人自認厭惡或者害怕數學，卻又樂此不疲於玩「數獨」，其實他們玩「數獨」時正是在進行數學活動。那麼，為何不可以把這類數學活動（也不一定局限於「數獨」）融會於課堂教學中，寓學習於娛樂，讓學生對數學科從小便開始有一個較全面的認識，不要以為數學就是枯燥的刻板計算而已？

從數學觀點而言，「數獨」衍生的問題可多了，不僅限於解答某個給定的「數獨」題。雖然，這些衍生的問題對於解答某個給定的「數獨」題不

一定有直接幫助，但他們帶來的趣味和用途，有可能更大更多。說實在話，如果單是要解答某個給定的「數獨」題，編寫一個電腦程序已經可以達致目的。2015 年 5 月 11 日新加坡報章《海峽時報》〔The Straits Times〕報導一則新聞，李顯龍總理在 4 月 20 日一個創業論壇上向在場的科技企業專家分享自己編寫電腦程序的經驗。據他透露，數年前他以 C++ 語言編寫了一個電腦程序，用以破解任何「數獨」題。他還把這個電腦程序在個人面書主頁上公開，與同好分享。李顯龍年青時在劍橋大學〔Cambridge University〕主修數學，在 1973 年更成為 Senior Wrangler（劍橋大學傳統中的數學尖子），翌年以數學一級榮譽畢業，同時取得計算機科學優異文憑。對他來說，借助電腦破解「數獨」，乃自然不過之事。聽說在 2011 年 10 月美國聖母大學〔University of Notre Dame〕有兩位數學家 Zoltán Toroczkai 和 Mária Ercsey-Ravasz 找到一種方法，不必猜度亦不必回溯也能破解任何「數獨」題，也就是說，玩「數獨」不必用附上橡皮擦子的鉛筆，用原子筆也可以！他們還相信，這種演算法可以施用於別的實際問題上。

但有了電腦程序破解「數獨」題，遊戲頓然變得沒趣！那就有如小時候我對「一筆畫」遊戲甚感吸引，很喜歡玩。但後來明白了它背後的道理，便再沒有興緻玩了！十八世紀瑞士數學大師歐拉〔Leonhard Euler, 1707 – 1783〕有個著名的定理，刻劃了後世稱之謂歐拉圖與半歐拉圖〔Eulerian Graph, Semi-Eulerian Graph〕的性質，讓我們懂得如何決定「一筆畫」是否可能？可能的話如何畫？不過，代替了玩「一筆畫」遊戲的興緻，卻是一份更深層的喜悅，因為我明白了背後的數學原理，而且知道這個數學原理在眾多實際問題上大派用場。

讓我們先說明清楚一些名詞，以方便繼續討論。一個 9×9 方陣中每行每列及組成九宮格的 3×3 方陣中每格都是 1 至 9 其中一個，且僅單獨一個，這方陣便叫做一個「數獨」方陣〔Sudoku Square〕。把一個「數獨」方陣的部份數字隱去，便叫做一個「數獨」題〔Sudoku Puzzle〕。沒有隱去的數字叫做「數獨」題的提示〔clue〕。按照這種定義，每一個「數獨」題都一定有解答，但不一定只有唯一解答。因為可能有兩個不同的「數獨」方陣，隱去部份數字後，剩下的數字處處相同。如果一個「數獨」題只有唯一解答，即是只有一個方法把數字填進空白格，該「數獨」題叫做良好的「數獨」題〔sound Sudoku Puzzle〕。固然，所有在報章書本上出現的「數獨」題都是良好的。

初次碰上「數獨」這個遊戲，我的即時反應是問自己：（1）初始狀況是全空白，如何填？有多少個方法？（2）初始狀況是極少空白，是否容易破解？例如只有一個空白，想也不必想！只有兩個或三個空白，也差不多想也不必想。多少格空白才開始有難度呢？空白格作何分佈才有難度呢？（3）如何保證初始狀況導致唯一解？（4）如何判斷一個「數獨」題是多困難？用什麼標準能夠量度破解的困難程度？這些都是很好的數學問題，第一個即是「數獨」方陣的存在性問題〔existence problem〕與數數問題〔enumeration problem〕，第三個是「數獨」方陣的唯一性問題〔uniqueness problem〕。這三類問題，可以說是組合數學〔combinatorial mathematics〕裏面的中心問題。

不少報章雜誌上的報導，往往把「數獨」追溯至數學大師歐拉的工作。其實，那並非完全屬實。的而且確，歐拉在 1779 年發表了一篇題為 「有關一類新幻方」的數學論文，引進了一個新的數學對象，叫做 N 階拉丁方〔Latin Square of Order N〕，即是把 N 種不同的符號 （不妨稱作 1，2，3，⋯，N）填進一個 N × N 方陣，使每行每列都出現全部 N 種符號。更關鍵的是一對叫做正交 N 階拉丁方〔Orthogonal Latin Squares of Order N〕的新事物，就是有兩個 N 階拉丁方，把他們相應位置的符號組成 N^2 對數偶〔ordered pair〕，要求這 N^2 對數偶兩兩不同。歐拉在他的論文中敘述如何從某些正交 N 階拉丁方構作 N 階幻方，於此不贅。在這兒我們甚至不說明何謂 N 階幻方，那可是歷史悠久的有趣事物，在古代中國的「河圖洛書」早已經出現了。對此有興趣多瞭解一些的讀者，可以參看：蕭文強，《1, 2, 3，…，以外》第六章：「幻方、拉丁方和區組設計」，三聯書店（香港），1993 年，124 至 168 頁。

顯然，一個「數獨」方陣是個 9 階拉丁方，但不是任何一個 9 階拉丁方也是個「數獨」方陣，因為一個「數獨」方陣必須滿足多一項條件，就是組成九宮格的每個 3 × 3 子方陣裏面出現的九個數字必須兩兩不同。「數獨」方陣的數目肯定少於 9 階拉丁方的數目，但少幾多呢？

讓我們先看看共有多少個不同的 9 階拉丁方。首先注意到把一個拉丁方的若干行或若干列互調，得來的仍然是一個拉丁方，所以不妨把第一行和第一列都寫成 1 至 9 順序排好，先數一數共有多少個這樣的拉丁方，設有 L(9) 個。把這 L(9) 個拉丁方的行或列互調，即得到全部不同的 9 階拉

丁方，共有 L (9) × (9!) × (8!) 個，這兒的數學符號 n! 表示 1 × 2 × 3 × … × n。早於 1975 年已經有數學家 Stanley E. Bammel 和 Jerome Rothstein 計算了這個答案，是

$$5{,}524{,}751{,}496{,}156{,}892{,}842{,}531{,}225{,}600$$

$$\approx 5.52 \times 10^{27} \text{ 個。}$$

我們還可以通過旋轉或鏡像變換把貌似不同的拉丁方看作同一類，正式的數學名詞叫做等價類〔equivalence class〕，進一步減低這個數目。有一套優美的理論，稱作波利亞 – 列爾菲爾計數定理〔Pólya–Redfield Enumeration Theorem〕，專門用以處理這個問題。運用這個定理我們知道不同的 9 階拉丁方等價類共有

$$19{,}270{,}853{,}541 \approx 1.92 \times 10^{10} \text{ 個。}$$

在這兒我不花篇幅解釋這套異常優美的理論，是原籍匈牙利的美國數學家波利亞〔George Pólya, 1887 – 1985〕在一篇發表於 1937 年的論文提出的，但其實早十年前已經有一位美國工程師列爾菲爾〔John Howard Redfield, 1879 – 1944〕在另一篇論文解決了這個問題，只是由於列爾菲爾的名氣遠不如波利亞，他的論文一直受到忽略，直至 1960 年才被人發掘出來，結果在 1984 年國際雜誌《圖論學報》〔Journal of Graph Theory〕辦了一個紀念列爾菲爾的特輯，把他在半個世紀前的舊作重新刊印出來！有興趣的讀者可以參看：蕭文強，《波利亞計數定理》，湖南教育出版社，1991 年。

「數獨」方陣的數目應該更少，在 2006 年有兩位數學家 Bertram Feigenhauer 和 Frazer Jarvis 計算了這個答案，是

$$6{,}670{,}903{,}752{,}021{,}072{,}936{,}960 \approx 6.67 \times 10^{21} \text{ 個，}$$

即使考慮不同的等價類（除卻行或列互調與旋轉或鏡像變換外，還有九宮格互調），仍然有 5, 472,730,538 ≈ 5.47×10^9 個，說少不算少，還是多於 50 億個！

雖然有上億個「數獨」方陣（等價類），要寫一個出來還是需要少許數學工夫的，數學正是用來探索事物的規律〔pattern〕。我們不妨以一個基本的九宮格（見圖 2a）開始，把 1 至 9 順序排成 3 × 3 方陣。接著我們適當

地把數字調換，便得到一個「數獨」方陣（見圖 2b）。固然，還有很多別的方法，例如把基本九宮格的數字各加上某個數字（10 看作 1、11 看作 2、12 看作 3，如此類推)，再把得來的九宮格放在另一個位置，如果加上的數字得宜，合起來可以是一個「數獨」方陣，例如向左加 3，向下加 1，即是對九宮格的數字依次加 0、3、6、1、4、7、2、5、8，得來一個「數獨」方陣（見圖 2c）。但如果胡亂選取加上的數字，合起來卻不一定是一個「數獨」方陣，讀者可以思考一下，應該如何選取加上的數字？它們必須滿足什麼條件？這就是進行數學思考了！

1	2	3						
4	5	6						
7	8	9						

圖 2a

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
3	1	2	6	4	5	9	7	8
6	4	5	9	7	8	3	1	2
9	7	8	3	1	2	6	4	5
2	3	1	5	6	4	8	9	7
5	6	4	8	9	7	2	3	1
8	9	7	2	3	1	5	6	4

圖 2b

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	8	9	1
5	6	7	8	9	1	2	3	4
8	9	1	2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8	9	1	2
6	7	8	9	1	2	3	4	5
9	1	2	3	4	5	6	7	8

圖 2c

一個「數獨」題最多和最少可以有多少個提示呢？這個平凡不堪的提問有個平凡答案，分別是 81 個和 0 個！但下一個提問卻不簡單了：一個良好的「數獨」題最少可以有多少個提示呢？或者，我們先提一個比較容易回答的問題：多少個空白格導致唯一解？設「數獨」題有 m 個空白格（即是 $81-m$ 個提示)，若 $m=0$ 或 $m=1$ 或 $m=2$，顯然只有唯一解。若 $m=3$，仍然只有唯一解，那可要費點唇舌解釋，留給有興趣的讀者吧。若 $m=4$，卻未必有唯一解了（為什麼？)，所以最多可以有 77 個提示使「數獨」題不是良好的。不過，有 77 個提示的「數獨」題也有可能是良好的；更少一些，有 76 個提示的「數獨」題也有可能是良好的；如此減下去，直至有 8 個提示的「數獨」題也有可能是良好的。但是，只有 7 個提示的「數獨」題，就一定不是良好的，因為一個良好的「數獨」題的提示必須包括 1 至 9 其中至少八個不同的數字（為什麼？），不過，這仍然沒有答覆以上的提問：一個良好的「數獨」題最少可以有多少個提示呢？在 2012 年 1 月數學家 Gary McGuire、Bastian Tugemann 和 Gilles Civario 證明這個最少數目是 17（可參看 arXiv:1201.0749v2 [cs. DS] 1 Sept 2013）。也就是說，少於 17 個提示的「數獨」題肯定不是良好的；有 17 個至 77 個提示的「數獨」題可

以是良好的，也可以不是良好的，視乎空白格的分佈。通常報章書本上出現的「數獨」題有 26 個提示。

十年前香港中文大學心理學系的李雅言〔Louis N.Y.Lee〕教授與他的合作者做了一項調查研究，利用「數獨」這個遊戲窺探人類認知過程及理性思維。他們進行了幾個實驗，邀請先前沒有接觸過「數獨」的大學生試玩困難程度不一的「數獨」題，而且要求實驗者解釋他們填上某些數字的理由。研究結果發現每個人都具備某程度的演繹推理能力，即使沒有接受過正式的邏輯訓練，在試玩過程中實驗者都能夠自行發展一些初等策略以助破解「數獨」題；有些實驗者更能夠發展一些進階策略以助破解較困難的「數獨」題。也許，我們需要加上一項前提，就是玩的人願意思考。由於「數獨」是遊戲，多數人願意這樣做，換了是一道邏輯習作，情況可能大不相同！這項調查研究結果，在 2008 年發表了，有興趣知道詳細討論的讀者，可以參看：N.Y. Louis Lee, G.P. Goodwin, P.N. Johnson-Laird, The psychological puzzle of Sudoku, *Thinking & Reasoning*, 14(4) (2008), 342-364.

在這篇論文裏，研究者還提出了一些發人深省的教學意見。他們認為沒有接受過正式的邏輯訓練的人也有足夠能力對抽象事物進行演繹推理，而且他們從中得到樂趣。因此，他們認為數學教學注重抽象事物，較諸於只注重日常生活見到的具體事物，可能更見效果。他們還引述著名瑞士心理學家皮亞傑〔Jean Piaget 1896-1980〕的觀點：對距離平淡日常生活頗遠的抽象事物進行演繹推理是人類的一個基本特徵，而且於智力發展而言是完全必要的。我們常常從實際世界的具體事物出發去構思數學對象和激發數學意念，但很快我們便不得不踏入抽象理念世界才能翱翔於數學王國。固然，在小學中學階段不宜過於著重抽象事物，但特意迴避數學抽象的一面亦非善策。況且，抽象思維能力隨個人的經歷、學識和教育與日俱增，倒非高不可攀。再者，思維乃人類最寶貴的財產，人類文化賴它得以繼往開來。（見諸：蕭文強，我看「大眾數學」，刊於：嚴士健（編）《面向廿一世紀的中國數學教育：數學家談數學教育》，江蘇教育出版社，1994 年，256-265 頁。）具體事物與抽象概念、實際應用與純粹理論，都是有深刻辯證意味的哲學課題，並非三言兩語可以清楚說明的，在學習數學過程中經潛移默化，自能悟出一些道理來。

「數獨」乃遊戲，但數學遊戲帶來的益處甚多。一方面數學遊戲培養觀察力、專注力、耐心、好奇心和靈活思考；另一方面數學遊戲培養邏輯思維能力、空間想像能力、有條理的分析能力和綿密工夫習慣，是真正的「愉快學習」。公元前四世紀的哲學經典《莊子 • 雜篇 • 外物》有言：「仲尼曰：……嬰兒生無石師而能言，與能言者處也。」意思是說，嬰兒出生後，毋須跟從優秀的教師也能學會說話，因為他置身於會說話的人群。有些事情我們應該讓它自然發展，毋須加以外力，就好像幼兒不用教導而學會說話一樣。可見學習不必單靠在課堂上由教師強行灌輸，只需要為學生設置適當的環境氛圍，他們便會自發地學習了，通過玩「數獨」學習數學並非「天方夜譚」！曾經有數學家說過：「每位專業數學家都清楚知道娛樂成份與認真態度並不相悖。主要功夫是保證讀者既歡享娛樂成份，卻不會忽略數學上的重點。」（見諸：John Baylis and Rod Haggarty, *Alice in Numberland: A Students' Guide to the Enjoyment of Higher Mathematics*, Macmillan Education, 1988.）

有關「數獨」的材料，在互聯網上多不勝數，使人目不暇給，有些網頁更是專為此而設。近年也出版了一本書，敘述與「數獨」有關的數學，內容豐富，喜愛數學的讀者不妨找來一讀：Jason Rosenhouse, Laura Taalman, *Taking Sudoku Seriously: The Mathematics Behind the World's Most Popular Pencil Puzzle*, Oxford University Press, 2011。

有句老話：「我們不是因為年老而停止遊戲，而是因為停止遊戲才會變老。」（這句話的來源眾說紛紜，有些人認為是富蘭克林〔Benjamin Franklin 1706-1790〕說的，有些人認為是蕭伯納〔George Bernard Shaw 1856-1950〕說的，還有別的說法。）更好的補充來自美國心理學家霍爾〔Granville Stanley Hall 1844-1924〕在他的名著《青春期：它的心理學及其與生理學、人類學、社會學、性、犯罪、宗教和教育的關係》〔*Adolescence: Its Psychology and its Relations to Physiology, Anthropology, Sociology, Sex, Crime, Religion and Education*, D. Appleton & Company, 1904〕說的一段話：「[Karl] Groos 說得好，他說孩子年輕，是因為他們玩耍，並非因為他們年輕才玩耍；其實，他可以加上一句：人變老，是因為他們停止玩耍，也非他們年老便停止玩耍。因為，說到底，玩耍就是成長，而且在智力最高層次上，它是源於摯愛真理而作的永恆探索。」

的確，法國人類學家李維史陀〔Claude Lévi-Strauss 1908-2009〕也說：「選擇教學專業的學生並沒有告別童年；恰恰相反，他正試圖留在其中。」讓我們保持童心，寓學習於娛樂；勤固有功，戲非無益，常作思考，增長見識！

作者電郵：mathsiu@hku.hk