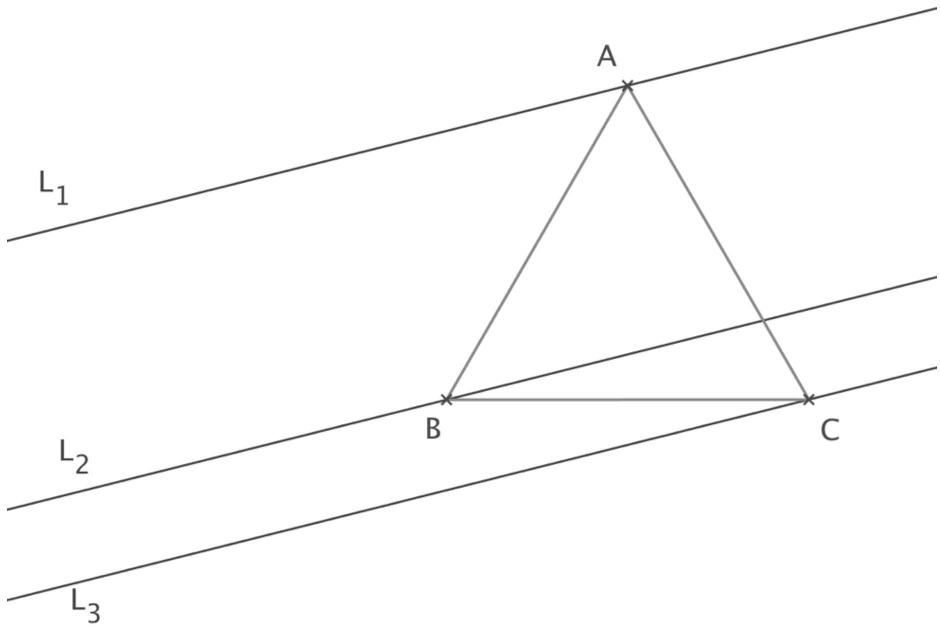
# 從代數到變換看一條幾何作圖題的解

譚志良
香港大學教育學院




圖一

已知三條平行線 $L_1$ 、$L_2$ 、$L_3$ ，並 $L_1$ 上的一點 $A$。
求在 $L_2$ 和 $L_3$ 上作點 $B$ 和 $C$ 使 $ABC$ 為等邊三角形。

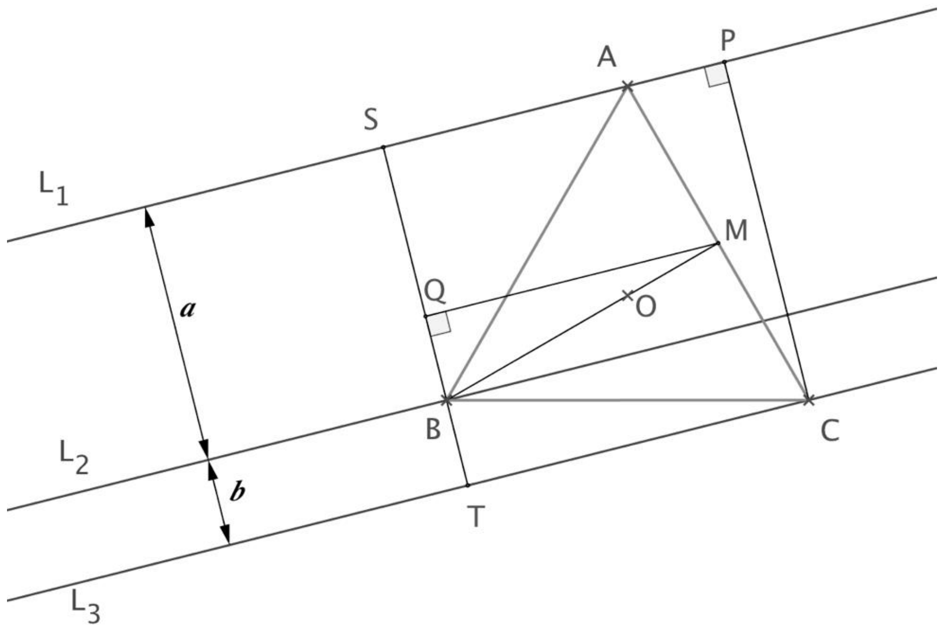
這條題目最初是在蕭文強教授所寫的一本小書上看，覺得有趣，於是想想應如何做。我的第一個嘗試是從代數的角度思考。

解：

設 $L_1$ 與 $L_2$ 的距離為 $a$ ，$L_2$ 與 $L_3$ 的距離為 $b$。

如果 $a=b$ ，則所求的等邊三角形的邊長為 $a+b$。作圖當然沒有問題。

如果 $a > b$ ，




圖二

設 $B$、 $C$ 為所要作的點，$M$ 為 $AC$ 的中點， $PC$ 、$SBT$ 垂直 $L_1$。

不難証明 $\Delta BQM \sim \Delta APC$。

因此，

$$\frac{BQ}{BM} = \frac{AP}{AC}$$

$$\frac{\frac{a+b}{2}-b}{BM} = \frac{AP}{AC}$$

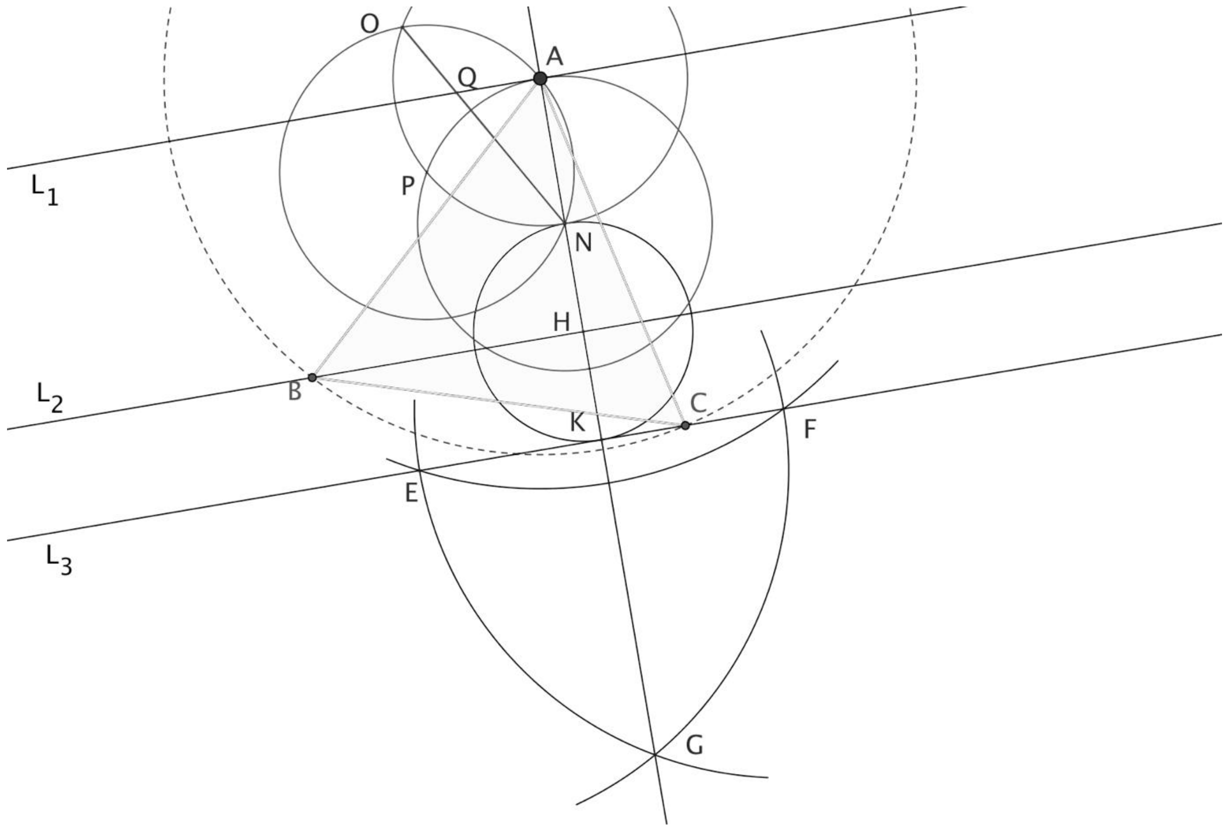
$$\frac{\frac{a-b}{2}}{BC\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{AP}{AC}$$

$$\frac{a-b}{\sqrt{3}BC} = \frac{AP}{AC}$$

$$\because BC = AC$$

$$\therefore AP = \frac{a-b}{\sqrt{3}}$$

既然$AP$ 的長度可以作到，所求的等邊三角形的邊長亦可以得到。




圖三

首先，作通過 $A$ 點垂直 $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ 的直線並分別交 $L_2$ 和 $L_3$ 於 $H$ 和 $K$。

以 $H$ 為圓心，$HK$ 為半徑作圓交 $AH$ 於 $N$，則 $AN = a - b$ 。

以 $AN$ 為半徑，分別以 $A$ 和 $N$ 為圓心作圓交於$P$，再以 $AN$ 為半徑， 以 $P$ 為圓心作圓交於$O$。

作直線 $NO$ 和 $L_1$ 交於 $Q$。

$\angle ANQ = 30°$

$AQ = AN(\tan 30°) = \frac{a-b}{\sqrt{3}}$

所以 $QK$ 等於所需等邊三角形的邊長。

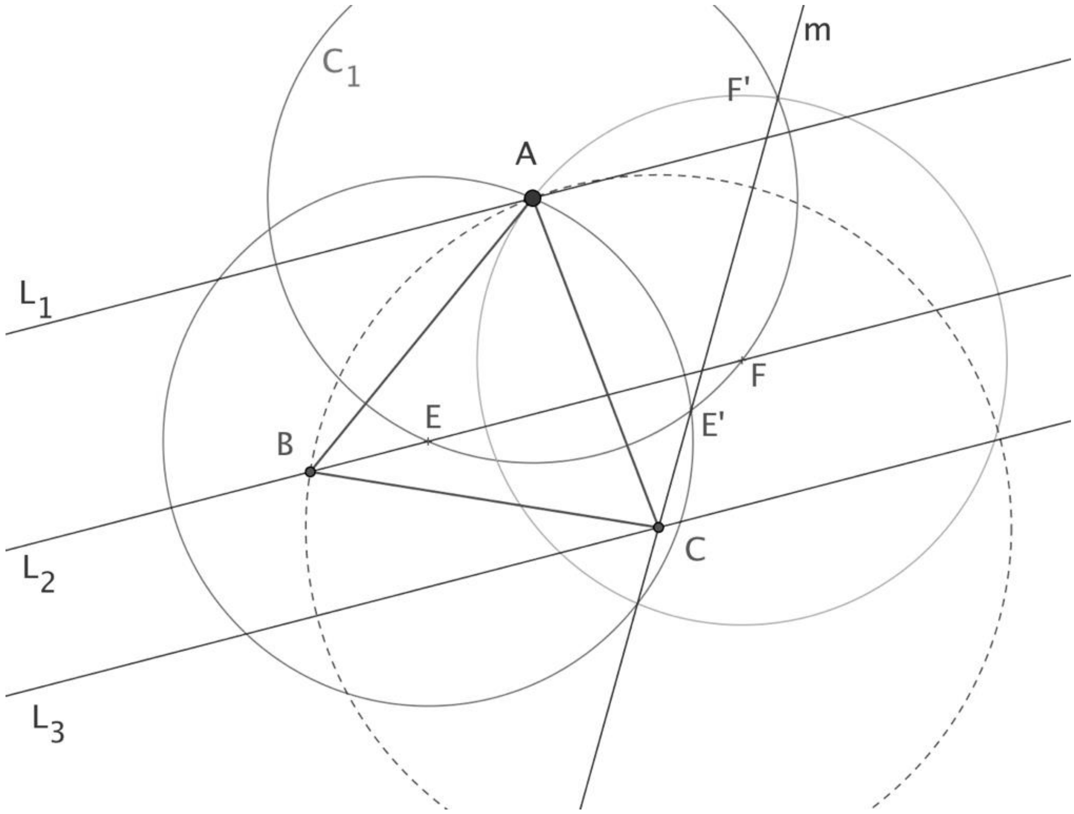
## 用幾何變換的角度思考問題

上述方法用的是結連有關長度的代數關係，雖然也能完成作圖，但是沒有簡單的方法推廣至其他的條件（例如三條線不平行，三個圓等）。

重新回看圖一，假如我們視 $C$ 點為 $B$ 點以 $A$ 點為中心逆時針方向旋轉 $60°$ 的影像呢？

雖然我們不知道 $B$ 點的位置，但 $B$ 點必然在 $L_2$ 上而 $B$ 點以 $A$ 點為中心經逆時針方向旋轉 $60°$ 的變換後必然在 $L_3$ 上。既然如此，我們大可直接將 $L_2$ 以 $A$ 點為中心逆時針方向旋轉 $60°$，$L_2$ 旋轉後的影像和 $L_3$ 的交點就是所需的 $C$ 點了。$C$ 點既找出，$B$ 點當然可找到。

作圖方法：




圖四

1. 以 $A$ 點為圓心作弧 $C_1$ 和 $L_2$ 相交於 $E$ 和 $F$。

2. 以 $E$ 點為圓心，作通過 $A$ 點的圓和 $C_1$ 交於 $E'$ ，以 $F$ 點為圓心，作通過$A$點的圓和 $C_1$ 交於 $F'$。

3. 連接 $E'F'$ 得 $L_2$ 的旋轉影像 $m$ 。

4. 作 $L_3$ 和 $m$ 的交點 $C$。

5. 以 $C$ 點為圓心，作通過 $A$ 點的圓和 $L_2$ 交於 $B$ 。

以上以旋轉變換為考量的方法，並沒有太多限制，三條線並不需要平行，三個圓也可以，圓線混合也沒有問題。作圖相對簡單，當中的幾何關係也相當容易理解。老師亦可以用來向學生說明幾何變換之美。

作者電郵：tamchileung@gmail.com