從 $a{:}b$ 與 $\frac{a}{b}$ 說起

楊鳳興
香港真光中學

某次數學科會與同事們一起討論一條公開試題。

設 x 及 y 均為非零的數。若 $2x-3y=0$ ，則 $(x+3y):(x+2y)=\cdots$（HKEAA，2005）

其中一個解答如下：

$$
\begin{aligned}
& 2x-3y = 0 \\
\therefore\quad & \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \\
& (x+3y):(x+2y) \\
= \quad & (\frac{x}{y}+3):(\frac{x}{y}+2) \\
= \quad & (\frac{3}{2}+3):(\frac{3}{2}+2) \\
= \quad & \frac{9}{2}:\frac{7}{2} \\
= \quad & 9:7
\end{aligned}
$$

倘若同學給出以下的答案，老師們會接納嗎？

$$
\begin{aligned}
& (x+3y):(x+2y) \\
= \quad & \frac{\frac{x}{y}+3}{\frac{x}{y}+2} \\
= \quad & \frac{\frac{3}{2}+3}{\frac{3}{2}+2} \\
= \quad & \frac{9}{7} \\
= \quad & 9:7
\end{aligned}
$$

表面看來，兩者差異似乎不太，只是後者用了 $a:b=\dfrac{a}{b}$ 這個式子。然而 $a:b=\dfrac{a}{b}$ 成立嗎？筆者參考坊間數本教科書對這個式子的處理，留意到它出現在「比」這個課題中三個不同層面，包括比的定義、比的性質及化簡，和例題。

在定義上，有一本教科書把「比」定義為：

對兩個同類的數量 a 和 b，a 比 b 為 $a:b=a\div b=\dfrac{a}{b}$，其中 $b\neq 0$。（數學探知，2009）

有些則以 $a:b$ 與 $\dfrac{a}{b}$ 為「比」的兩種表達方法。好像：

比是同類量的比較。a 比 b 可表示為 $a:b$ 或 $\dfrac{a}{b}$（其中 $a\neq 0$ 及 $b\neq 0$）。（初中數學新探索，2013）

雖然大部份課本未見 $a:b=\dfrac{a}{b}$ 出現在比的定義，但是在別處，包括註解等，仍有兩本利用 $a:b=\dfrac{a}{b}$ 去解釋 $a:b\neq b:a$，其中一本寫法如下：

在一般情況下：$a:b\neq b:a$，例如：$2:3=\dfrac{2}{3}$，而 $3:2=\dfrac{3}{2}$。（數學與生活，2016）

此外，在闡釋比的性質時，除了一本採用以下寫法：

若 a、b 和 m 都是非零的數，由於 $a:b=\dfrac{a}{b}$，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{am}{bm}$ 和 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}}$，故可得出 $a:b=am:bm$ 及 $a:b=\dfrac{a}{m}:\dfrac{b}{m}$。（數學新思維，2014）

別的教科書均避開使用 $a:b=\frac{a}{b}$ ，選擇以文字解釋，好像：

由於 $a:b$ 可寫作分數 $\frac{a}{b}$ ，因此把兩個量同時乘以或除以同一個非零數時，所得的比會保持不變。（新世代數學，2016）

即使教科書作者對 $a:b$ 與 $\frac{a}{b}$ 是否相等莫衷一是，以下例子卻屢見不鮮。

考慮 $4:12$ 這個比。

$4:12=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}=1:3$

$\therefore$ $4:12$ 和 $1:3$ 這兩個比相等。（新世代數學，2016）

最後，姑勿論教科書對 $a:b=\frac{a}{b}$ 的看法如何，無一例外地在例題上也會以 $a:b=\frac{a}{b}$ 為解題技巧之一，或視作問題的另解，甚至刻意提醒讀者須先以分數形式表示比，再進行化簡，像以下兩個例子：

例題 5(b)，化簡下列各比。

$0.75\text{ m} : 40\text{ cm}$

$= 75\text{ cm} : 40\text{ cm}$

$= 75 : 40$

$= \frac{75}{40}$

$= \frac{15}{8}$

$= 15 : 8$

（初中數學新探索，2013）

例題 1.5 的另解

$$\begin{aligned}&10:5\\=\ &\frac{10}{5}\\=\ &\frac{2}{1}\\=\ &2:1\end{aligned}$$

（數學·高效學習，2015）

從上文可見，教科書對 $a:b=\frac{a}{b}$ 的處理頗為含糊，可是在一些關鍵時刻又似乎不得不拿出來作為工具使用。筆者以為 $a:b$ 與 $\frac{a}{b}$ 相等與否這個疑問源自於用來表達除法、分數和比的符號在歷史上產生多重理解有關。符號學創始人之一的索緒爾（Ferdinand de Saussure）提出符號是由符號具（signifier）和符號義（signified）組成。符號具是符號的形象，可由我們的感官感知，而符號義則是符號的指涉概念，同一個文化內，會有大致相同的概念。誠然最理想的符號結構是一義一符，可是「÷」、「—」和「：」在發展上卻發生了「一符多義」和「一義多符」的情況。尤其是「÷」和「：」，它們在用法上不單沒有達成統一的協定，甚至被美國數學史家卡喬里（Florian Cajori）形容它們為「兩個完全以政治邊界劃分的符號」。（Cajori，1993）

先說分數符號，分數概念很早便出現，用來記錄它的符號也五花八門。直至十二世紀阿拉伯數學家哈薩爾（al-Hassâr）想出一個簡便的方法來表示分數，就是將分母寫在一條水平短線的下方，把分子寫在線的上方，這便是現在通用的分數線。至於除法符號，由於除法是乘法的逆運算，人類亦很早掌握了除法的技巧。萊昂納多（Leonardo of Pisa）不單把阿拉伯的分數線推廣，更把除法和分數概念扣在一起。而「÷」作為除法符號來運用，始於瑞士數學家拉恩（Johann Heinrich Rahn）於 1659 年撰寫的《Teutsche Algebra》，故它被稱為 Rahn's notation，為英美數學界普遍採用。「：」也一度作為除法的代表，最早可追溯到 1631 年英國數學家奧特雷德（William Oughtred），可惜並未受注意。雖然 1633 年出版的《Johnson Arithmetik; In two Books》一書曾以「：」表示分數，但作者並未賦予它除法的意義。直至

1684 年萊布尼茲（Gottfried Wilhelm Leibniz）發表了《Acta Eruditorum》，以「：」表示除法漸漸為他人所接受。在沃爾夫（Christian Wolf）的影響下，德法兩國亦相繼採用。然而卡喬里（Cajori，1993）指出「÷」和「：」在當時未為世界通用，「÷」作為除法符號只為英國、受英國統治的國家和美國接納，而歐洲大陸及拉丁語系國家則採用「：」。這種涇渭分明式以政治邊界劃分的符號運用取態造就了英國天文學家文森特（Vincent Wing）賦予「：」另一個意義的機會。十七世紀中期，他分別在《Urania practica》(1651)、《Logistica astronomica》(1656)、《Doctrina spherical》(1655) 和《Doctrina theorica》(1655) 四本書中以「：」表達比的關係式。此舉改變了奧特雷德及一些數學家以往用「.」表示比的習慣，加上萊布尼茲認為比本身已包含了除的意思，故歐洲大陸一貫以「：」表達除法與比。故此「：」得到英美和歐洲大陸普遍接受。可是一些學者如傑克（Samuel Jeake）等以為，比與除法或分數不盡相同。比可涉及兩個有理數、有理數與無理數，以致兩個無理數之間的關係，而分數涉及的只是有理數的問題。因此他們提出以不同符號標示兩者。再者根據法國數學家安德烈（Désiré André）的觀察，「：」的左右對稱特徵，作為不對稱的除法運算符號，具有一定誤導性。因此到了二十世紀，已越來越少用「：」來表達除法。1923 年在 National Committee on Mathematical Requirements 更提出，「÷」和「：」作為除法符號在商業上非扮演著重要的角色，考慮到數學，特別是代數的需要，應更多地使用分數形式及其符號“—”去表達代數式。

由此可見，因為除法、分數和比在歷史上一度被認為是相通（甚至是相同）的概念，所以形成了代表它們的符號出現多重意義。雖然比與分數之間關係密切，但我們仍可嘗試找出相異的地方。台灣劉秋木（2004）引 S. Ohlsson（1998），指出分數的數學建構有四種，包括商函數、有理數、合成函數和二元向量。分數最基本的數學性質是兩個數之間除的關係，因此 $\frac{a}{b}=c$ 可視作一個由 a 和 b 對應 c 的函數，稱作商函數。$\frac{a}{b}$ 也可表示一個對象（object）或代表商函數的一個不變值。就好像 $\frac{2}{3}$、$\frac{4}{6}$ 和 $\frac{10}{15}$。從有理數的定義看，都代表相同的值。$\frac{a}{b}$ 亦可被視為一個合成函數。好比存在一個實數 x 乘以 $\frac{a}{b}$，可看作將 x 增加 a 倍，再縮小 b 倍。

最後，$\frac{a}{b}$ 也可以是二元向量。以直線的斜度為例，斜率公式 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 既可指出高度與寬度之間的比較關係，亦可用來表達直線的方向。

另一邊廂，台灣柳芳宛（2010）則嘗試追溯今人如何建構比的概念。當中 Lamon（1995）提出比是用來表示任意兩個數量 a 和 b 之間的一種關係。然而關係可以是多元的。既可是函數的對應關係 $b=f(a)$，亦可以是比較關係。故 Ohlsson（1998）進一步提出比是一個數量相對於另一數量大小關係數值的表示方法。在兩種不同比較數量的運算－通過減法求出絕對差量，或除法求出兩量間的倍數中，Thompson（1994）明確表示比是以除法運算來進行比較，即是說比是兩個數以倍數關係比較的結果，其常見的表示方法有 $a:b$、$\frac{a}{b}$、a/b 和 a to b 等。

那麼 $a:b$ 和 $\frac{a}{b}$ 除了是兩種不同表示法，還可以怎樣連繫起來？根據台灣林碧珍（2006），我們可把 $\frac{a}{b}$ 稱為比值，是比的量化結果，即 $a:b$ 的比值為 $\frac{a}{b}$。如班上有男生 21 人和女生 16 人，則班上男女生的比是 $21:16$，其比值為 $\frac{21}{16}$。進一步來說，比值 $\frac{a}{b}$ 可有三種不同的詮釋。第一種，$a:b$ 的比值為 $\frac{a}{b}$，代表這是前項除以後項的結果。其次，$\frac{a}{b}$ 代表一個單位的 b 對應到 $\frac{a}{b}$ 個單位的 a。最後，由於 $a:b=\frac{a}{b}:1$，當後項為 1 時，前項 $\frac{a}{b}$ 即為 $a:b$ 的比值。由此可見，$a:b=\frac{a}{b}$ 的較佳寫法應該是 $a:b=\frac{a}{b}:1$。故此，香港教科書的例子該改寫為 $75:40=\frac{75}{40}:1=\frac{15}{8}:1=15:8$。需要特別注意的是，當一個分數被視為比值時，其分數加減法則亦會隨之改變。設 A 班有男生 21 人和女生 16 人，則班上男女生的比是 21：16，其比值是 $\frac{21}{16}$。若 B 班有 13 個男生和 21 位女生，那麼這班男女生的比是 13：21，其比值是 $\frac{13}{21}$。兩班合併，男女生的

比變成（21+13）:（16+21） = 34：37，其比值是 $\frac{21+13}{16+21}=\frac{34}{37}$ 。這不單有異於一般分數加法 $\frac{21}{16}+\frac{13}{21}=\frac{21\times21+13\times16}{16\times21}=\frac{649}{336}$ ，在分數的範疇內，更被視為錯誤的計算方式。

總括來說，從思考 $a:b=\frac{a}{b}$ 是否成立開始，筆者走了一躺數學符號歷史之旅，看見分數、除法和比在意義上的接近，和在政治形勢下，以致產生出一符多義和一義多符的情況。從文獻可見，$\frac{a}{b}$ 與 $a:b$ 不單是比的兩種不同的表示法，更可構成一個 $a:b=\frac{a}{b}:1$ 的關係式。倘若本文能引起一點點好奇心，或許接下來可追問的是在不同環境下該如何輪流使用冒號或分數形式去突出比的特性呢？

參考文獻

文炳輝、楊仲明、楊家漢、郭宇輝、張興仁（2016）。《數學與生活 2A》。香港：培生教育出版，頁 1.12。

何美芬、洪進華、廖詠琪（2014）。《數學新思維 2A》。香港：香港教育出版社，頁 1.14。

周煒強（2009）。《數學探知 2B》。香港：文達出版社，頁 9.11。

林碧珍（2006）。比與比值初始概念的教學初探。《新竹教育大學教育學報》。第二十七卷，第一期，頁 127-158。

洪劍婷、陳浩文、彭可兒（2013）。《初中數學新探索 1B》。香港：香港教育圖書公司，頁 2.17-2.18。

柳芳宛（2010）。《一位六年級教師實踐比與比值教學之行動研究（博士論文）》。新竹：國立新竹教育大學，頁 1-238。

徐品方、張紅（2006）。《數學符號史》。北京：科學出版社。

孫興運編（1998）。《數學符號史話》。濟南：山東教育出版社。

梅維光、陳夢熊、鄧銘枝、盧賢巨、盧帝恩、譚志輝（2015）。《數學·高效學習 2A》。香港：中大出版社，頁 1.32。

黃德華、黃鳴蟬（2016）。《新世代數學 2B》。香港：牛津大學出版社，頁 7.11。

劉秋木（2004）。《國小數學科教學研究》。臺北：五南圖書出版公司。

Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations*. New York: Dover Publications.

Hong Kong Examinations and Assessment Authority. (2005). *HKDSE Mathematics 2005*. Hong Kong: HKEAA.

Lamon, S. (1995). Ratio and proportion: Elementary didactical phenomenology. In J. Sowder, & B. Schappell (Eds.), *Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades* (pp. 167-198). Albany, NY: State University of New York Press.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts. In J. Heibert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 53-92). Reston, VA: NCTM.

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 179-234). Albany, NY: State University of New York Press.

作者電郵：fhyeung@gmail.com