

續立體圖形課堂設計的啟示

黃德鳴

天水圍官立中學

黃偉強、麥煒權

迦密愛禮信中學

伍卓仁

四位筆者有幸於 14/15 年度末參與「Apple Summer Learning Academy 2015」¹ 時互相認識，並於一個利用 iPad 流動應用程式作課堂設計的環節中交流，對初中數學課程「續立體圖形」有深刻的啟示。

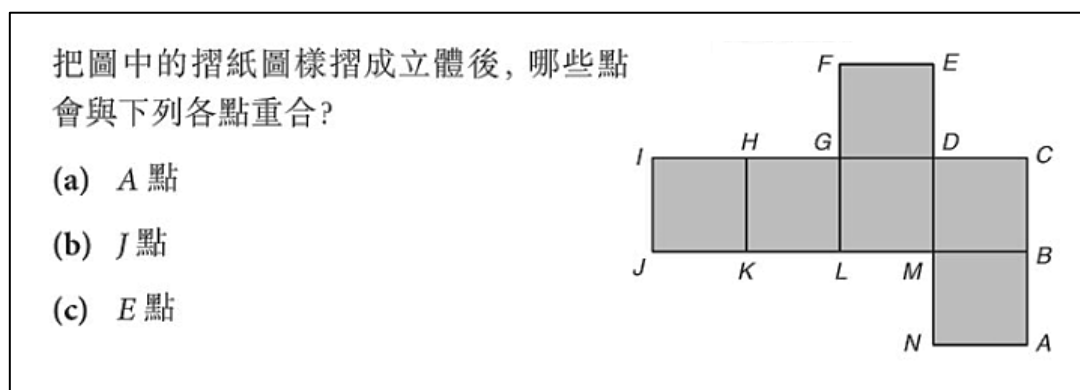


圖 1

教授該課題時，相信同工們總避不開如「圖 1」² 此類的問題，而本篇想探討的問題如下：

- (一) 在摺紙圖樣中，利用代數方法找出點的重合性質；
- (二) 利用幾何方法找出重合的另一（些）點。

1 Apple 於 2014 年 7 月舉辦了一系列的工作坊，以推廣行動學習，其中包括「Basic Concept of iPad Usage in Classroom」、「iPad Subject Based Training」及「IT Technical Training」。筆者們參與的是 iPad Subject Based Training 中的 Secondary Mathematics 課程。

2 題目取自《數學與生活》(第二版)，中三級電子課本，第五章「續立體圖形」，第 18 頁，例 5.2，朗文出版社。

為方便以後說明，在此為部分術語先下定義：

1. 點、頂：點 (point) 跟頂 (頂點, vertex) 相同，前者用於摺紙圖樣的描述上，後者用於立體的描述上；
2. 線、稜：線 (line) 跟稜 (edge) 相同，前者用於摺紙圖樣的描述上，後者用於立體的描述上；
3. 凸點：於摺紙圖樣上，內角小於 180° 的點，如圖 1 的 E 和 N；
4. 凹點：於摺紙圖樣上，內角大於 180° 的點，如圖 1 的 G 和 M；
5. 有序度 (degree of order)：連接某點的線的數目，或連接某頂的稜的數目。

為使將要討論的問題更一般化，先把正方體的所有摺紙圖樣³ 詳列如下：

1. 由三列組成：上列、中列和下列分別有一個、四個和一個正方形

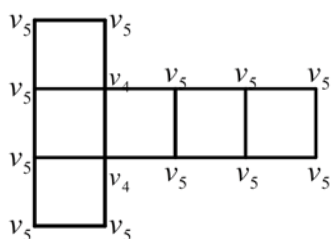


圖 2(a)

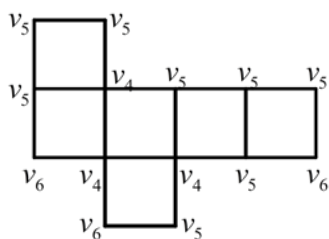


圖 2(b)

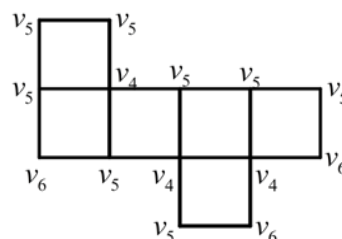


圖 2(c)

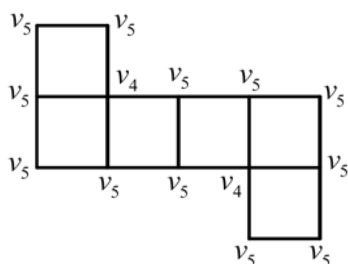


圖 2(d)

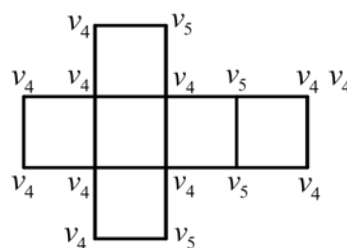


圖 2(e)

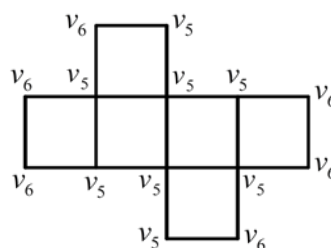


圖 2(f)

3 此分類法由蘋果傑出教育工作者北京人大附中西山學校金政國老師提出，他亦是次活動的其中一位主要分享者。

2. 由三列組成：上列、中列和下列分別有兩個、三個和一個正方形

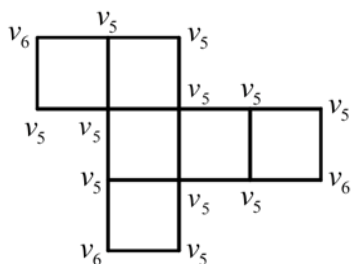


圖 2(g)

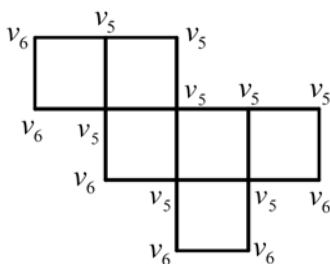


圖 2(h)

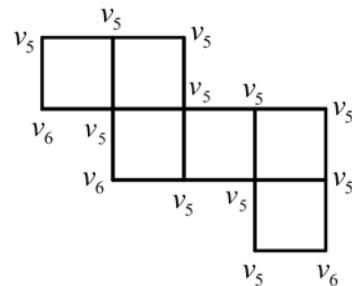


圖 2(i)

3. 由三列組成：上列、中列和下列各有兩個正方形

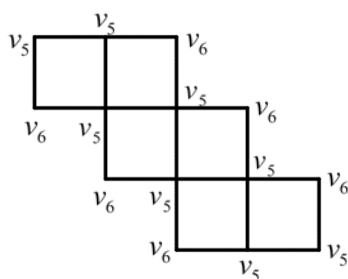


圖 2(j)

4. 由兩列組成：上列和下列各有三個正方形

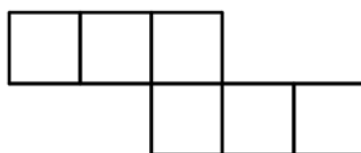


圖 2(k)

從圖 2(a)至 2(k)可得知，點可分為三類：

- A. 有序度為 2，其內角小於 180° ，為凸點；
- B. 有序度為 3，其內角等於 180° ，為一直線段上的點；
- C. 有序度為 4，其內角大於 180° ，為凹點。

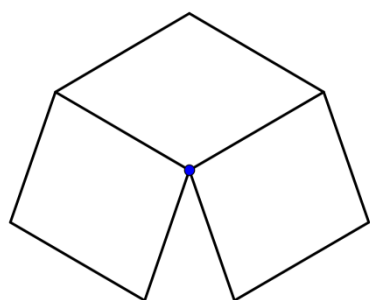


圖 3(a)

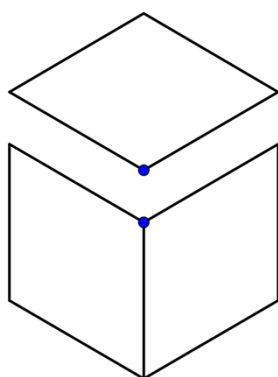


圖 3(b)

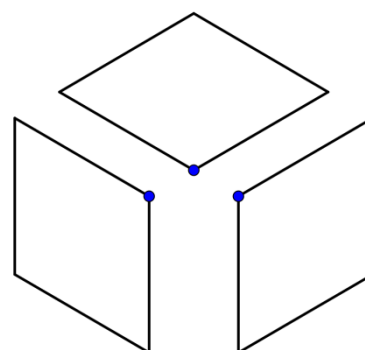


圖 3(c)

現在回到立體的部分，從圖 3(a)至 3(c)可得知，頂也可分為三類：

- A. 有序度為 4，由有序度為 4 的點變換而成；
- B. 有序度為 5，分別由一有序度為 2 的點和一有序度為 3 的點重合而成；
- C. 有序度為 6，分別由三有序度為 2 的點重合而成。

設 v_4 、 v_5 和 v_6 分別為有序度是 4、5 和 6 的頂的數量。已知正方體的頂數為 8，由此可得：

$$v_4 + v_5 + v_6 = 8 \quad \dots\dots (1)$$

從圖 2(a)至 2(k)得知點的有序度之和皆為 14，另從以上三項有關頂的描述，可得：

$$v_4 + 2v_5 + 3v_6 = 14 \quad \dots\dots (2)$$

由於 v_4 是凹點的數量，基本上利用直觀已可求得，而 (1) 和 (2) 就組成了以 v_5 和 v_6 為兩個未知數的聯立方程。下表為圖 2(a)至 2(k)的解，亦成為了問題 (一) 的總結：

圖	有序度為 4 的頂的數量 (v_4)	有序度為 5 的頂的數量 (v_5)	有序度為 6 的頂的數量 (v_6)
2(a)、2(d)、2(k)	2	6	0
2(b)、2(c)、2(g)、2(i)	3	4	1
2(e)、2(f)、2(h)、2(j)	4	2	2

至於第二個問題，且由上文提及的立體部分入手，把頂分為三類：

- A. 有序度為 4，由有序度為 4 的點變換而成；
- B. 有序度為 5，分別由一有序度為 2 的點和一有序度為 3 的點重合而成；
- C. 有序度為 6，分別由三有序度為 2 的點重合而成。

上文已提及，所有有序度為 4 的點皆為凹點，而凹點則自我重合，因此 A. 的情況已解。B. 和 C. 的情況可一併解決，步驟如下：

- (1) 找出所有凹點；
- (2) 於摺紙圖樣的周界上，以各凹點為中心，按不同的單位線段⁴把點配對，由近至遠，至任何一方遇上另一凹點為止；
- (3) 重複(2)，直至所有點都被配對為止；
- (4) 把所有(2)的點拼合，捨去不合理的解，求尚未配對的解。

以下將以圖 2(a)、2(b)及 2(j)作詳細說明，圖 2(c)、2(d)、2(e)、2(f)、2(g)、2(h)、2(i)及 2(k)的說明則從略。

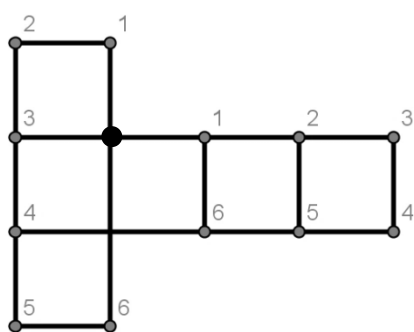


圖 4(a)(i)

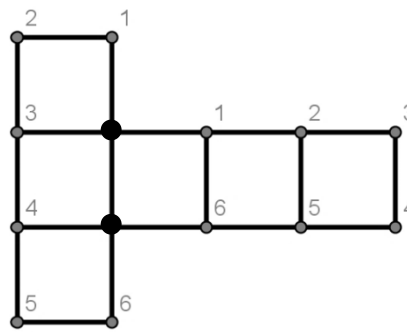


圖 4(a)(ii)

圖 4(a)(i)源於圖 2(a)，沒有標上數字的圓點為凹點（中心），距離中心一個單位線段的圓點標上 1，距離中心兩個單位線段的圓點標上 2，如此類推至 6 完成，只剩下另一凹點，因此無須完成步驟(3)和(4)，完成後可得圖 4(a)(ii)。

4 距離最近的兩點，其中間的線の間格定義為單位線段。

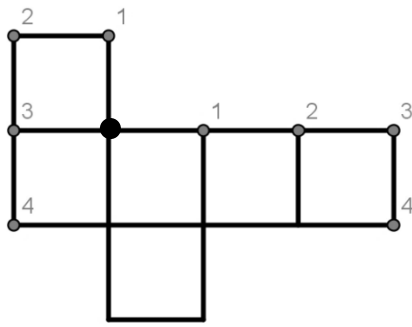


圖 4(b)(i)

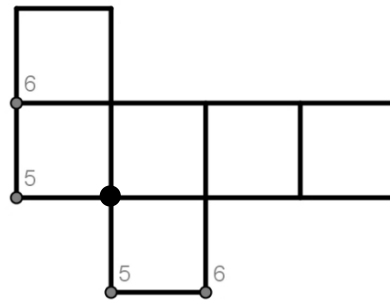


圖 4(b)(ii)

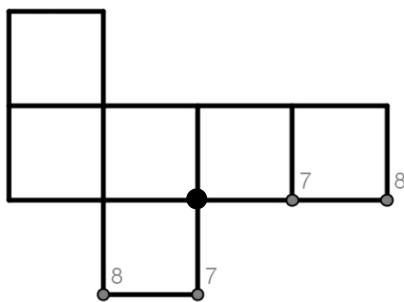


圖 4(b)(iii)

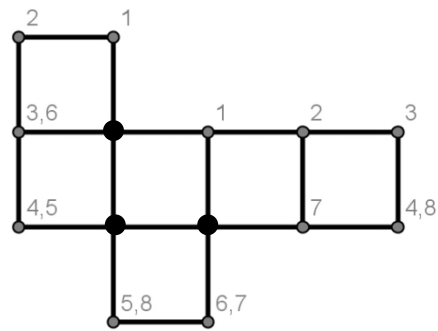


圖 4(b)(iv)

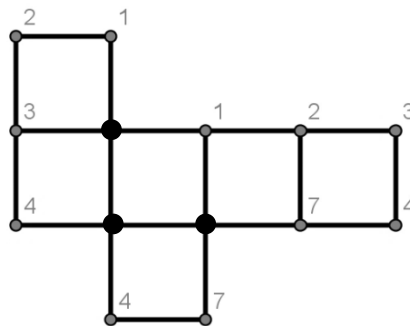


圖 4(b)(v)

圖 4(b)(i)源於圖 2(b)，根據上述的做法把圓點標上不同數字，惟是次於標上 4 後已遇上另一凹點，因此再利用另一凹點作中心，重複剛才的做法，直至所有凹點都完成為止。為免混淆，圖 4(b)(ii)中圓點數字由 5 開始，而圖 4(b)(iii)中圓點數字則由 7 開始，把圖 4(b)(i)、4(b)(ii)及 4(b)(iii)拼合後可得圖 4(b)(iv)。圖 4(b)(iv)中，有兩點標著 7，而只有一個數字的必須保留，因此點(6, 7)中的 6 將被捨去。此時，只有點(3, 6)標著 6，由於 6 沒有其他點可以配對，而亦有另一點只標著 3，該點也必須與點(3, 6)配對，6 就順理成章地被捨去。剩下還有三點標著多於一個數字，分別為點(4, 5)、點(4, 8)

及點(5, 8)，基於循環性質，三點可簡化為標上同一數字，為方便起見，筆者們使用三個數字中的最小值，完成後可得圖 4(b)(v)。

以上的構作以有序度為據，讀者如有興趣可加以驗證，在此不作贅述。

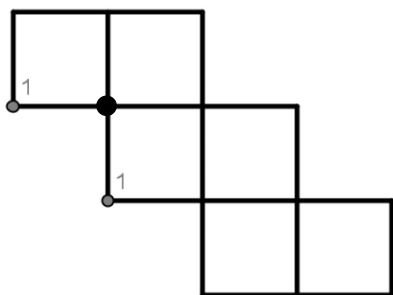


圖 4(j)(i)

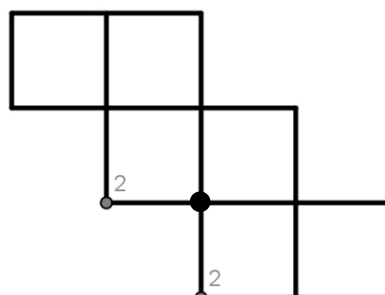


圖 4(j)(ii)

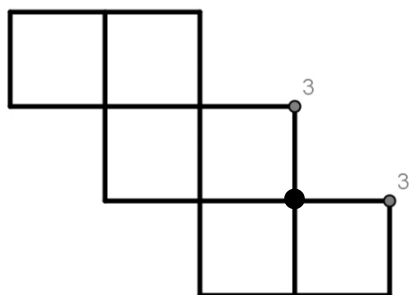


圖 4(j)(iii)

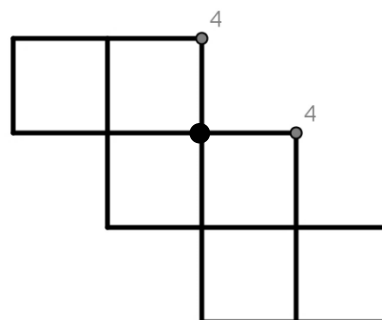


圖 4(j)(iv)

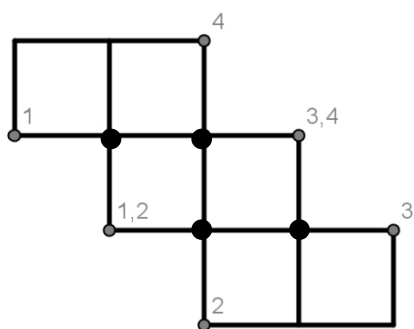


圖 4(j)(v)

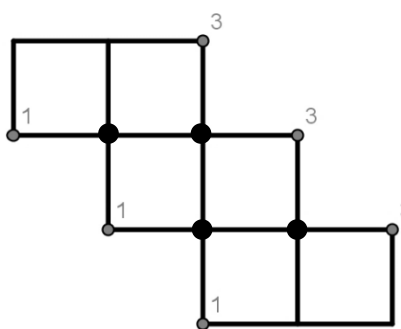


圖 4(j)(vi)

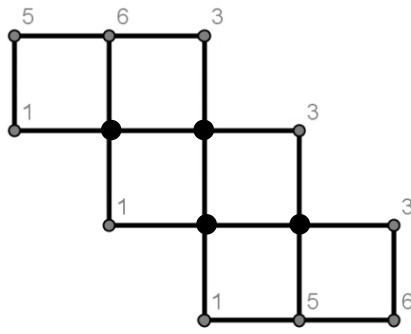


圖 4(j)(vii)

圖 4(j)(i)源於圖 2(j)，根據上述的做法可得圖 4(j)(vi)，惟完成後仍有沒數字的點，此情況可以有序度去解決，把有序度為 2 的點跟有序度為 3 的點配對，便可得出圖 4(j)(vii)。

下列為餘下的情況：

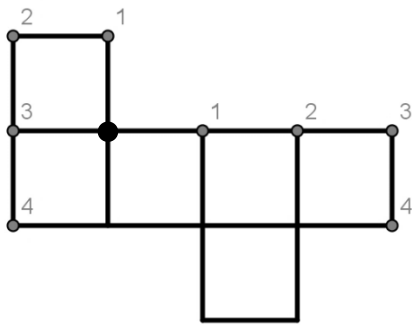


圖 4(c)(i)

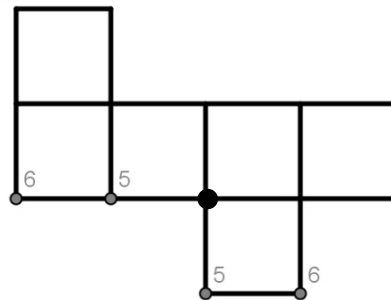


圖 4(c)(ii)

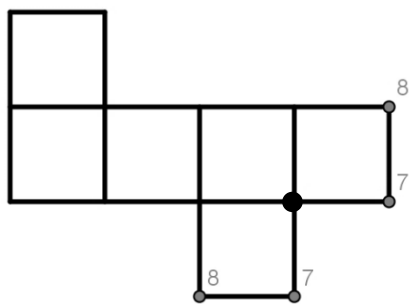


圖 4(c)(iii)

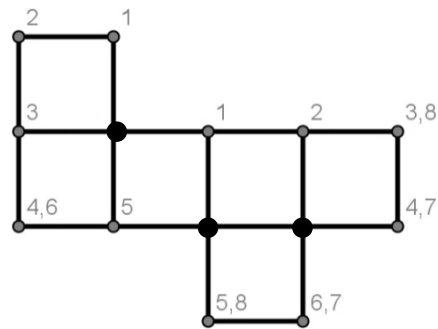


圖 4(c)(iv)

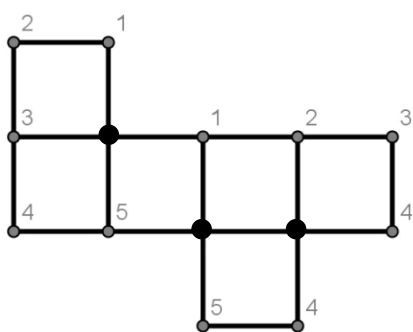


圖 4(c)(v)

上圖源於圖 2(c)。

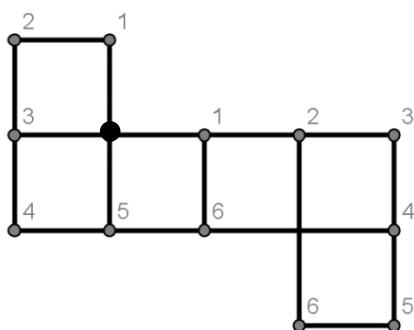


圖 4(d)(i)

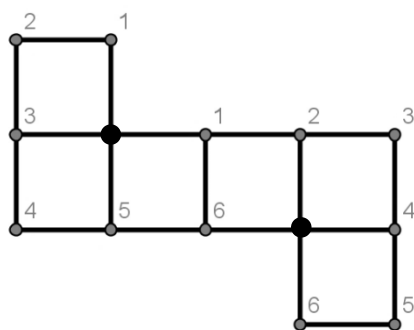


圖 4(d)(ii)

上圖源於圖 2(d)。

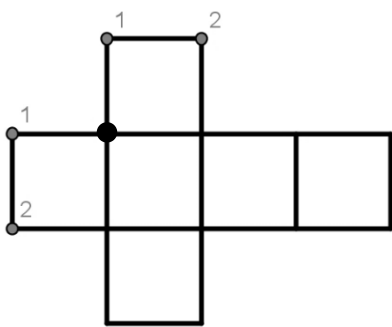


圖 4(e)(i)

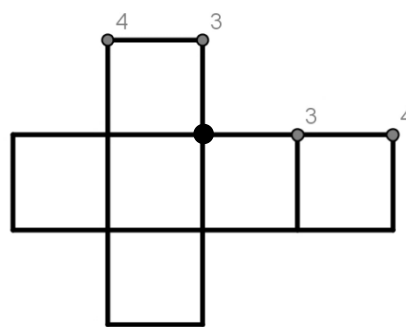


圖 4(e)(ii)

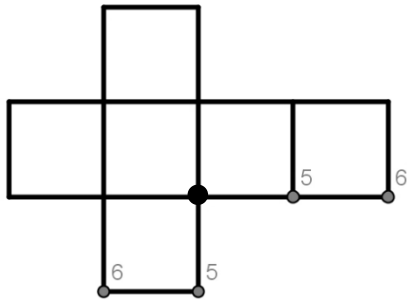


圖 4(e)(iii)

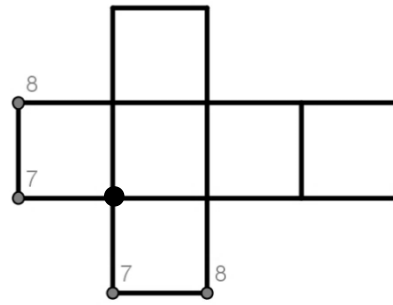


圖 4(e)(iv)

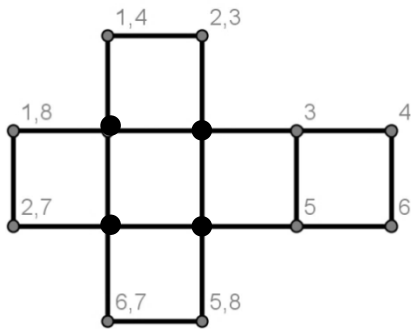


圖 4(e)(v)

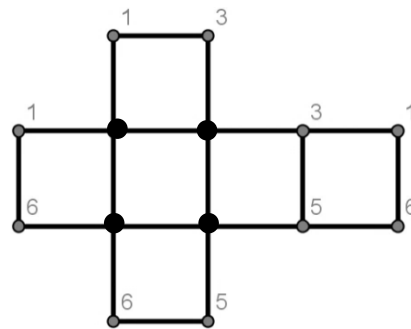


圖 4(e)(vi)

上圖源於圖 2(e)。

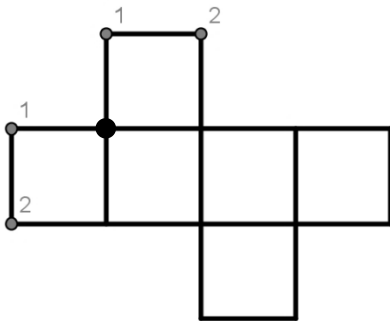


圖 4(f)(i)

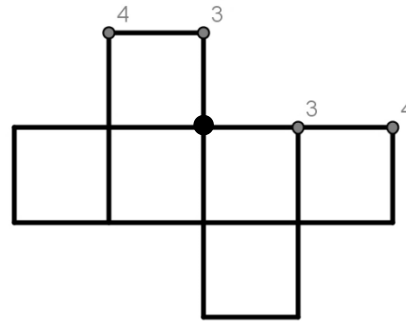


圖 4(f)(ii)

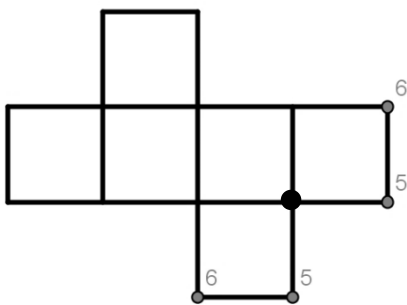


圖 4(f)(iii)

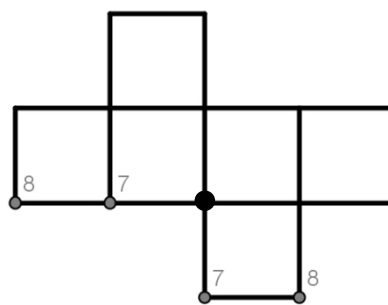


圖 4(f)(iv)

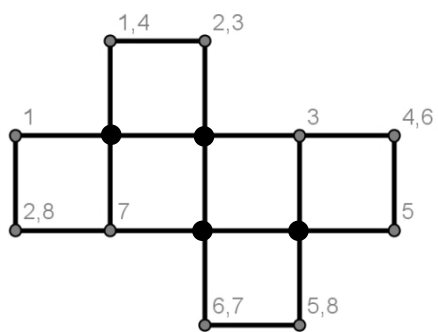


圖 4(f)(v)

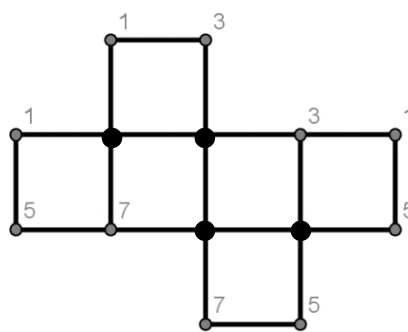


圖 4(f)(vi)

上圖源於圖 2(f)。

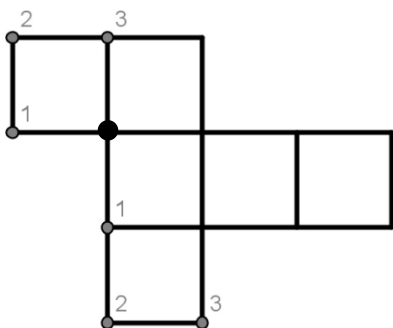


圖 4(g)(i)

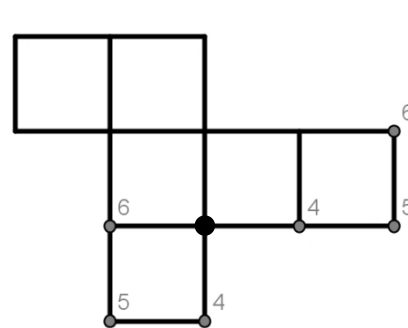


圖 4(g)(ii)

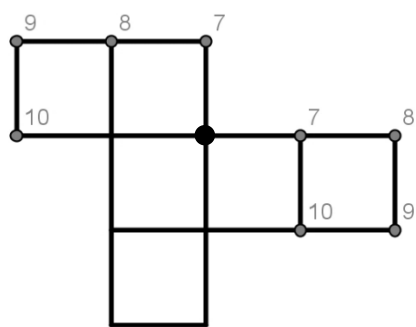


圖 4(g)(iii)

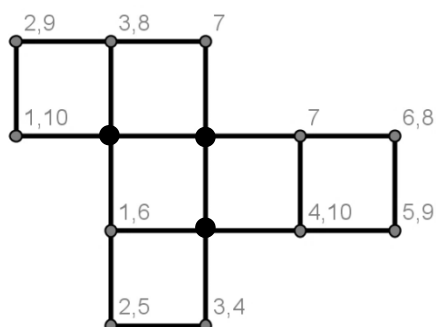


圖 4(g)(iv)

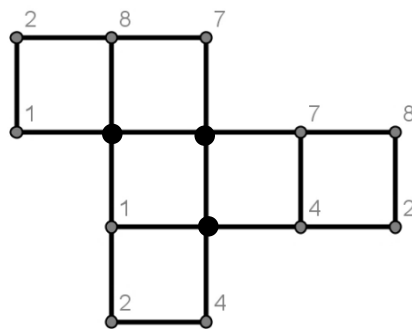


圖 4(g)(v)

上圖源於圖 2(g)。

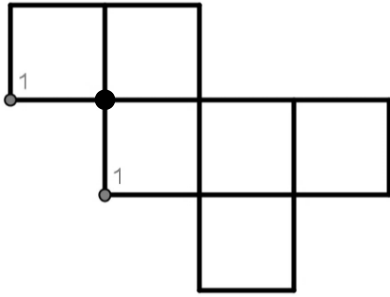


圖 4(h)(i)

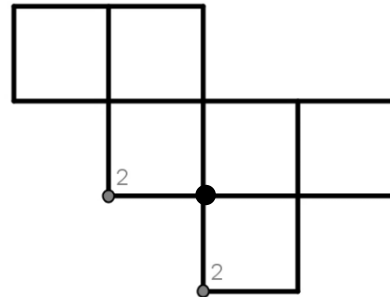


圖 4(h)(ii)

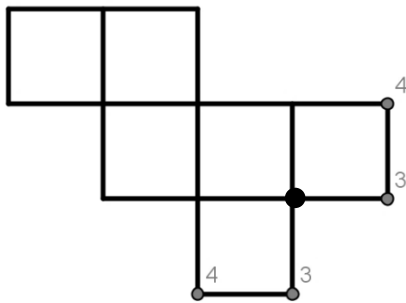


圖 4(h)(iii)

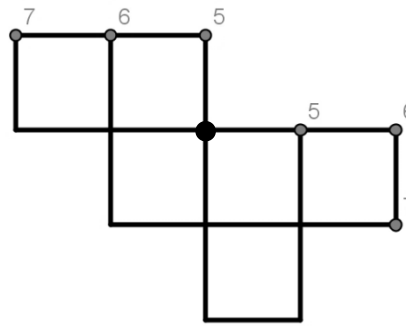


圖 4(h)(iv)

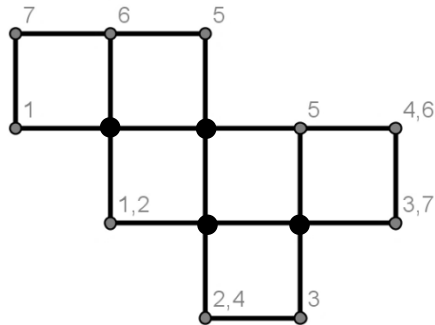


圖 4(h)(v)

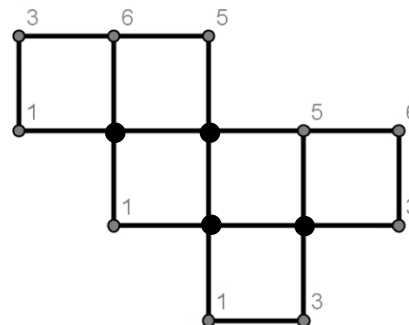


圖 4(h)(vi)

上圖源於圖 2(h)。

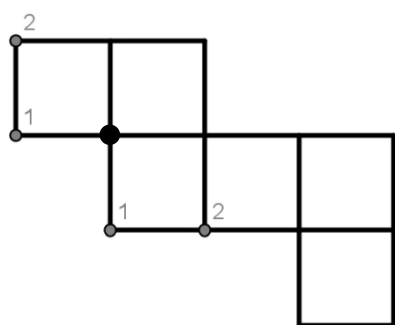


圖 4(i)(i)

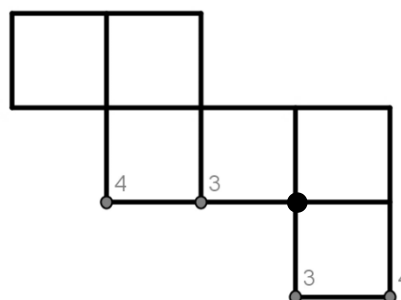


圖 4(i)(ii)

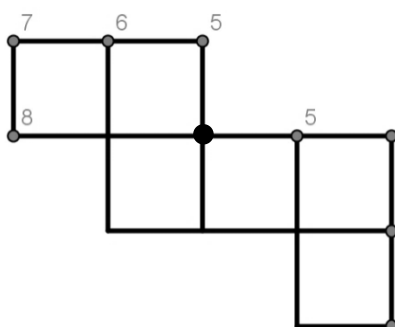


圖 4(i)(iii)

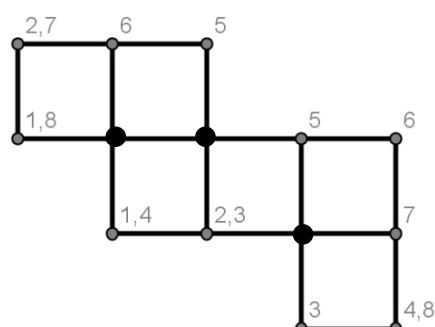


圖 4(i)(iv)

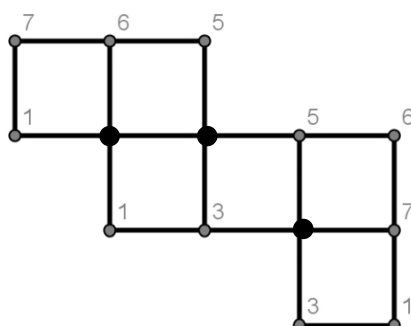


圖 4(i)(v)

上圖源於圖 2(i)。

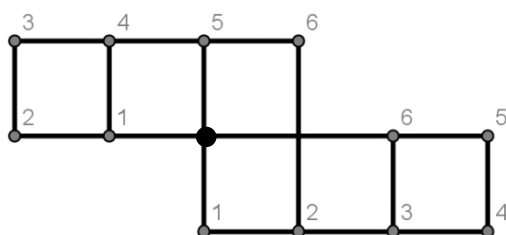


圖 4(k)(i)

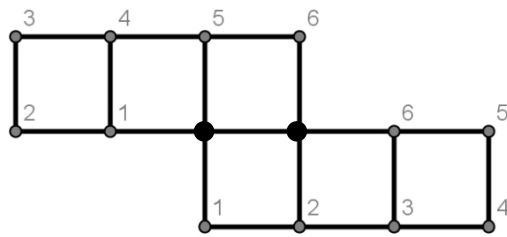


圖 4(k)(ii)

上圖源於圖 2(k)。

以上兩個問題的解，筆者們皆曾以「Shapes」⁵ 作驗證，然而是次探討的內容，乃是希望由使用電子科技過渡至使用紙筆答題，以免學生理解完精彩的課堂後，於評估階段沒有充足的技巧答題。

首作者電郵：mingshuk@yahoo.com.hk

⁵ Shapes 為一付費流動應用程式。