Fermat (分割)定理的又一簡捷証明

張賓　　甘肅省金昌市一中

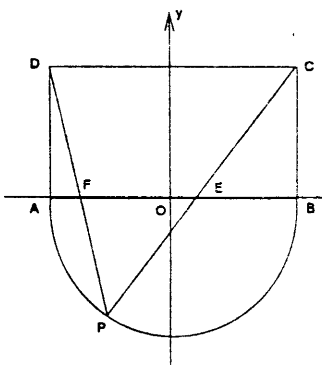
Fermat（分割)定理　矩形 ABCD 的邊 $AD=\frac{AB}{\sqrt{2}}$，以 AB 爲直徑在矩形之外作半圓，在半圓上任取一點 P，連 PC、PD 交 AB 於 E、F，則

$$AE^2+BF^2=AB^2.$$

R.A.Johnson 先生在文〔1〕中已給出了其一個漂亮的証明。貴刊在1996年第 3 期上刊登了袁金先生的"Fermat（分割)定理的代數法証明"（稱此文爲文〔2〕)一文。茲介紹其解析法証明。

証明　不妨取 AD = 1，則 $AB=\sqrt{2}$。建立如圖示的直角坐標系。易得 A $(-\frac{\sqrt{2}}{2}，0)$、B $(\frac{\sqrt{2}}{2}，0)$、C $(\frac{\sqrt{2}}{2}，1)$、D $(-\frac{\sqrt{2}}{2},1)$，且半圓的方程爲

$$x^2+y^2=\frac{1}{2}$$



設點 P 的坐標爲 $P(x_0，y_0)$，則 CP 的斜率爲 $\frac{y_0-1}{x_0-\sqrt{2}/2}=\frac{2y_0-2}{2x_0-\sqrt{2}}$

DP 的斜率爲 $\frac{y_0-1}{x_0+\sqrt{2}/2}=\frac{2y_0-2}{2x_0+\sqrt{2}}$

故直線 CP 的方程爲

$$y-1=\frac{2y_0-2}{2x_0-\sqrt{2}}\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

令 y = 0，得 E 的 x 坐標爲 $\frac{\sqrt{2}y_0-2x_0}{2(y_0-1)}$

同理可得 F 的 x 坐標爲 $\frac{-2x_0-\sqrt{2}y_0}{2(y_0-1)}$

$$\therefore AE^2+BF^2=(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}y_0-2x_0}{2(y_0-1)})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2x_0+\sqrt{2}y_0}{2(y_0-1)})^2$$

$$= \left(\frac{2x_0 - 2\sqrt{2}y_0 + \sqrt{2}}{2(y_0 - 1)}\right)^2 + \left(\frac{2x_0 + 2\sqrt{2}y_0 - \sqrt{2}}{2(y_0 - 1)}\right)^2$$

$$= \frac{2x_0^2 + 4y_0^2 - 4y_0 + 1}{y_0^2 - 2y_0 + 1}$$

$\because$ $P(x_0, y_0)$ 在半圓上

$\therefore$ $2x_0^2 = 1 - 2y_0^2$

$$\therefore\ AE^2 + BF^2 = \frac{1 - 2y_0^2 + 4y_0^2 - 4y_0 + 1}{y_0^2 - 2y_0 + 1}$$

$$= \frac{2(y_0^2 - 2y_0 + 1)}{y_0^2 - 2y_0 + 1}$$

$$= 2$$

又 $\because$ $AB^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$

$\therefore$ $AE^2 + BF^2 = AB^2$

參考文獻

1. R.A.Johnson (1995) 《近世幾何學》(第六版)(邱懷棠譯)。商務印書館。
2. 袁金 (1996)。 Fermat（分割）定理的代數法証明。《數學教育》，第3期，頁 59及61。

編者按：若設 $AD = 2$, $AB = 2\sqrt{2}$ 。運算過程涉及的數字會更簡單。