

充滿姿彩的數學教學 ——參加第二十三屆數學教育整數專題 國際會議的見聞

張鍵聰、張景輝

香港中文大學教育學院數學及數學教育全日制學士

一) 引言

第二十三屆數學教育整數專題國際會議於今年六月上旬在澳門大學教育學院圓滿結束。在是次會議中，來自世界各地的學者聚首一堂，討論有關小學整數教學的議題。我們亦有幸參加會議並發表報告。會議期間，大會安排了許多小組形式的討論，並邀請不同學者分享其對整數教學的看法。作為即將投身於數學教育界的準教師來說，是次會議令我們對整數教學有了新一番的體會，亦啟發我們對整數教學的一些新想法。以下我們將參與會議的所聞所感與大家分享，望能為老師們提供新的教學構思。

二) 對於「正正得正，負負得正，正負得負，負正得負」的教學

一次小組面談中，來自美國密歇根大學的 Hyman Bass 教授被問及如何教授「正正得正，負負得正，正負得負，負正得負」這個課題。Bass 教授提議可利用數線 (number line) 作解釋。首先，老師可以先以講解數字的量 (magnitude) 在數線上的表達方式。例如「3」就是在數線上從「0」畫到「3」(見圖 1)；而「-3」則能理解為將圖 1 的線段以原點作中心從正數區域反射到負數區域 (見圖 2)。

然後，老師可以解釋把數字「乘以負 1」就是將線段在數線上以原點作中心反射。所以「-(-3)」就是把圖 2 的線段以原點作中心從負數區域反射到正數區域。

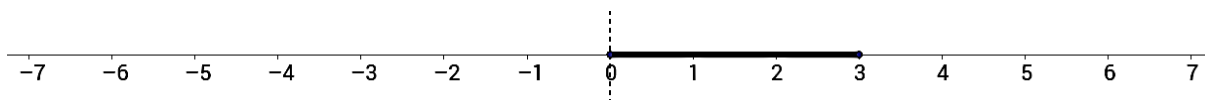


圖 1：「3」在數線上的表示

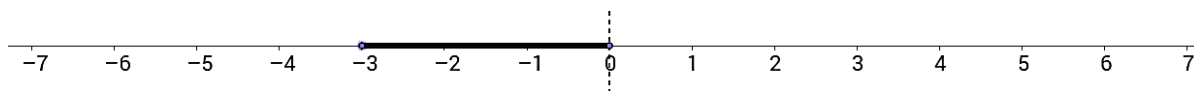


圖 2：「-3」在數線上的表示

Bass 教授利用「乘以負 1」及「反射」的概念來解釋「正正得正，負負得正，正負得負，負正得負」，既能直觀地讓學生感受到代數運算的過程，也有助學生在及後學習幾何課題時的理解。例如，將 $y = f(x)$ 沿 x 軸反射是 $y = -f(x)$ ；而將 $y = f(x)$ 沿 y 軸反射則是 $y = f(-x)$ 。可見，「乘以負 1」的運算是能在坐標幾何上以「反射」的形式顯示，若在整數教學上開始引入這兩概念的相互關係，或能令學生在高年級學習坐標幾何課題時更易接受。

三) 對初小階段的加、減數以至高小階段的簡易方程教學

在小組討論期間，來自新加坡的 Berinderjeet Kaur 教授介紹了新加坡在初小階段教授加、減數時使用的「部分－整體模型」(Part-whole Model)(圖 3)及「比較模型」(Comparison Model)(圖 4)，幫助學生在解答題目時，運用這些工具來理解並分析究竟是利用加法還是減法去找出答案。透過分析學生的學習表現，研究發現老師利用這些工具來協助學生先把具體的知識圖像化，然後再理解抽象的概念能有助提升學生的數字感及解答文字題的能力 (concrete – pictorial – abstract)。

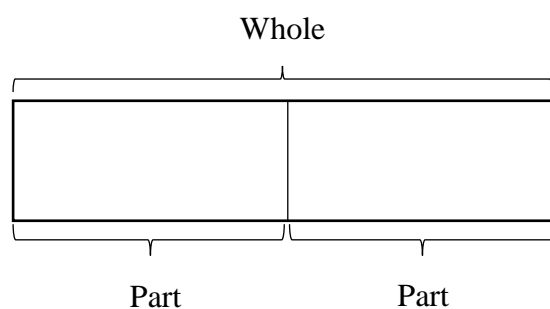


圖 3：部分－整體模型

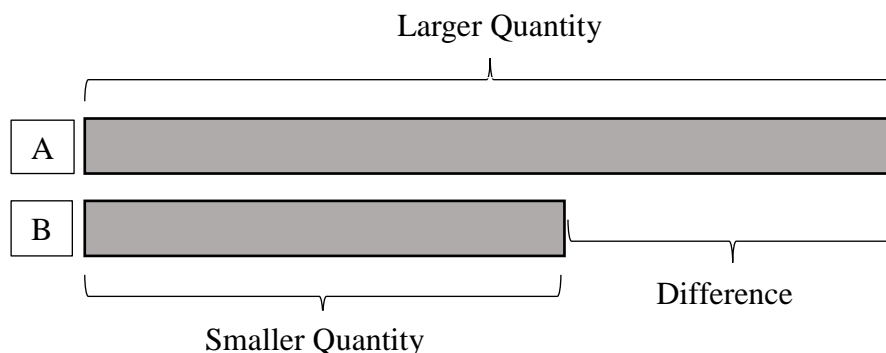


圖 4：比較模型

在會議期間，我們談及有學校老師把「部分－整體模型」的圖像轉換成「屋型」圖像（圖 5）的形式表達。雖然其概念本是同出一轍，但事實上可能會令學生衍生錯誤概念。試想像，當老師在課堂上說：「把下層的兩個四邊形加起來就會等於上層的三角形」，這句說話所存在的謬誤可以對學生理解圖形與空間的影響有多深遠？所以，當老師嘗試把這些工具「改良」成學生的好幫手的同時，亦要考慮到當中有可能衍生的錯誤概念，避免只為求學生記着此工具而忽略正確理解數學的重要性。

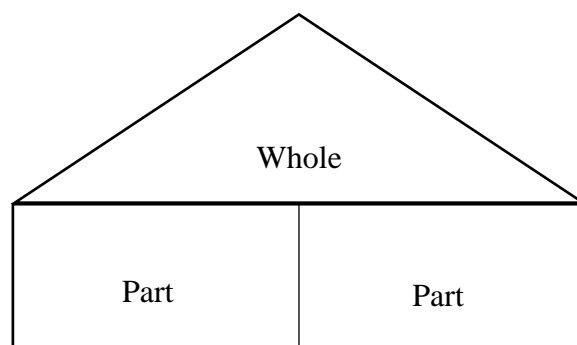


圖 5：屋型模型


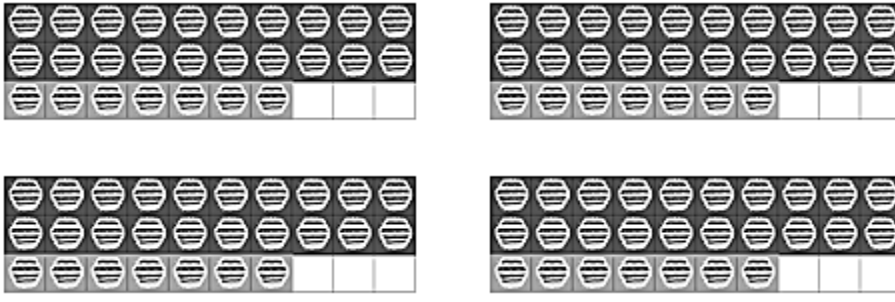
學生在初小時熟悉利用以上繪圖方式理解題目後，在高小學習方程式時，便能用同樣方法理解問題，找出未知數。這個繪圖方法或許能讓學生更容易從已有知識上建構新的概念，理解方程式。不過，我們或許也要考慮如何能幫助學生從直觀分析逐步過渡到抽象的符號運算。

Kaur 教授指出，在新加坡，因為老師從學生初小開始便利用這種模型法作為教學的一部分，所以學生習慣了以繪圖解題的步驟，在高年級的學習上便能事半功倍。若果香港老師要引入模型法教學，或可從低年級學生開始作試點，逐年延展至不同年級。

四) 對兩位數乘以一位數的教學

在會議期間，有學者提到，老師在教授兩位數乘以一位數的運算時，總會以直式計算運算過程，讓學生死記運算時的步驟，而忽略了解釋為何在兩數相乘時可以用一個數的個位乘以另一數的個位，然後又以同一個數的個位乘以另一個數的十位。也就是我們常說的，知道怎麼做 (how) 卻不明白為何 (why)。大家對此進行了熱烈的討論，一個共識就是：老師在教學上可以其實可以利用一些方法令學生不只流於死記硬背運算的步驟，而是真正明白步驟中的意思。比如，利用圖像或分物遊戲便是其中的一些方法，幫助學生理解為何在「兩位數乘以一位數」時可以把兩位數的十位及個位分別乘以一位數，然後再找出兩者之和。圖 6 便舉了一個例子來解釋這一作法。

例如： 27×4

<p>步驟一</p>	 <p>這裏有 4 盒糖果，每盒有 27 粒糖果。</p>
<p>步驟二</p>	 <p>現在將每盒糖果分為 1 袋 20 粒糖果加 1 袋 7 粒糖果。</p>



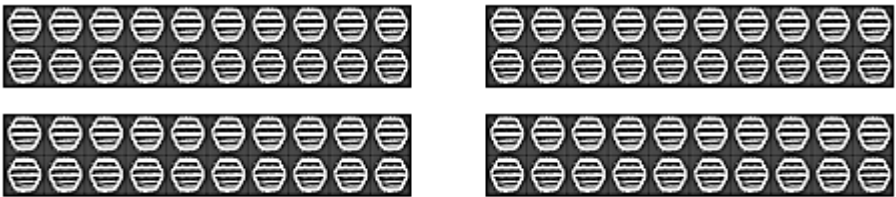
<p>步驟三</p>	 <p>然後將糖果重新組合，把每袋 20 粒糖果的放在一堆；把每袋 7 粒糖果的放在另一堆。</p>
<p>步驟四</p>	<p>計算糖果的總數時， 可以先計算 $7 \times 4 = 28$，</p>  <p>再計算 $20 \times 4 = 80$，</p>  <p>最後將 $28 + 80$，得出共有糖果 108 粒。</p>

圖 6：利用圖像解釋兩位數乘以一位數

老師在教學時可以先以分物遊戲令學生掌握「重組物件並不會影響物件總數」的概念，再帶出「先重組物件，後計算物件總數」能令計算更方便，以便引起學生的動機，然後強調在直式運算兩位數乘以一位數時的概念與「重組」概念的相互關係。相信這樣的講解能令學生更明白乘法直式上的不同部件，減少學生只死記硬背而忽略運算過程的背後原理。

五) 引起學生發現生活中隱含的數學問題的教學

老生常談的一句說話：生活當中其實包括了很多數學。但為何學生常常說他們只看到加、減、乘、除四大運算法則能應用在生活當中？難道其他數學課題就沒有在生活上出現嗎？當中，究竟差了點什麼呢？

會議期間，來自以色列的 Abraham Arcavi 教授提到日常生活當中隱含的很多與數學有關的課題，他也特別指出，若要發現它們的存在，老師們和學生們都要下一點苦功。例如：在車牌號碼的組合當中包含了組合問題，老師可由此引入「組合」的課題，繼而引導學生思考車牌上包含英文字母後令組合數目改變等問題，往後又可以討論其他國家或地方車牌與香港的分別，藉此討論其他非數學的話題（車牌的總組合數量可反映出當地人口數目等），令學生知道數學的確是與生活緊密聯繫。又例如：升降機的載重量包括了比例問題，香港的升降機普遍的載重量限制是 1000 公斤（12 人），由此看出製造商估計人均重量是大約 80 公斤；若是美國的升降機，載重量限制是 1200 公斤（10 人），估計人均重量是大約 120 公斤（McDowell & Ogden, 2008），藉此可討論有這分別的原因，帶出非數學的話題（不同地方人口的飲食習慣），讓學生知道簡單的一個數字可能隱含了不同國家的文化或其看法。像這樣逐步引領學生探究數學在日常生活中的奧妙之處，或許能令學生對課題留下更深刻的印象及引起他們的學習動機。

Arcavi 教授認為，老師若果能夠成為引領學生觀察身邊數學的導航者，學生觀看數學的角度便會變得具體及多樣化，而數學課堂亦會變得更生活化和有意義。所以，老師應該要與學生一起拓闊視野，積極搜索生活中隱含的數學課題。

六) 結語

作為尚未踏入職場的數學教育界新人，我們有幸與不同國家的數學教育學者作交流，嘗試從不同的角度觀看整數教學。無論是數學知識層面上的教學，或是透過數學發展學生的共通能力都是別有一番體會。同時，我們也看到一些一直未有為意的教學盲點。特別，在會場我們遇到香港的數學家蕭文強教授，並有幸和蕭教授伉儷留影，這也是對我們後輩的鼓勵！

參會之前，我們剛完成一次小學數學教學實習，也算擁有一些前線的教學經驗，所以在與學者交流時，更明白前線老師與學者的關注範疇所存

在的差異，也理解老師在實踐中運用新教學策略會遇到的挑戰。例如，有些學者會認為過早讓學生學習運算程序會令學生只流於死記硬背而導致未能真正理解運算程序的背後意義；但對於老師來說，若不教授運算程序，即使學生明白還算程序背後的概念而未能還算出正確答案，對學生來說亦未必是一種好事。再者，在不同的文化背景底下，這兩種取態均有支持者。尤其在一些國家（例如：特別在東南亞地區的國家），運算的速度備受重視，連帶出運算的程序亦變成教學的重點。因此，老師在教學上的著眼點便會側重於操練學生運算的速度及準確度，而盡早教授運算程序的取態可謂是難以避免。所以，我們更了解不同地方（甚至在不同學校）的學習文化足以影響老師的教學取向，而要改變習以為常的教學取向對老師來說亦有所難度。話雖如此，我們認為香港老師可以先向文化相近的地方作教學借鏡，逐漸優化自己的教學，然後再探索引入不同西方國家在數學教學上的教學策略的可行性，做到兼容並包，或許我們的課堂才更豐富，才更多姿多彩。

參考文獻

McDowell, M. A. & Ogden, C. L. (2008). Anthropometric References Data for Children and Adults: United States, 2003 – 2006. *National Health Statistics Reports*, 10, 1 – 48.

首作者電郵：vincentckc005@hotmail.com