五個兄弟姊妹的數學問題 — 「數味人生」偶拾

蕭文強
香港大學數學系
梁耀忠
退休中學教師

在一篇題為「數學與我何干？」的文章[5]，作者之一有這樣一段話：

『大家都不會否認數學在科學研究、科技發展、甚至社會科學、企業管理上的貢獻，矛盾卻在於大家往往只見到這些成就而忘卻了數學本身。美國《科學雜誌》（Science）的編輯哈密蒙特（Allen Hammond）將數學形容為「我們看不見的文化」，美國數學家哈爾莫斯（Paul R. Halmos）更埋怨說「很多受過教育的人竟然不知道我的學科的存在，使我十分傷心！」當然，這不是說大部份人真的不知道有數學，而是說大部份人並沒有了解數學是什麼。受過普通教育的人，即使不是藝術家也知道有雕刻、繪畫、…；即使不是音樂家也知道有歌曲、旋律、…；即使不是文學家也知道有詩、小說、…；即使不是科學家也知道有核能、蛋白質、微生物、行星、…。但有多少人知道什麼是函數、公理系統、可換群、流形、…？再者，不少人雖然「恥」於承認自己對藝術、音樂、文學、科學一無所知，卻「勇」於承認自己對數學一竅不通，甚至認為不通數學乃理所當然，坦白的時候，縱非喜形於色，亦必心安理得！

其實，我們根本是生活在數學的世界之中，數學就在我們周圍，直接地間接地影響了我們的生活。它的過去、現在、甚至可以預測它的將來，永遠是如此多姿多彩。一般人對數學的誤解，大體而言可分為幾項對立的二分法：有些人以為數學是枯燥無味或者

5 原文刊於《數學傳播》第 32 卷第 4 期（總 128），2008 年 12 月，頁 30 – 32，亦載於：蕭文強（2009），《心中有數》（頁 161 – 164），臺北：九章出版社；（頁 210 – 215），大連：大連理工大學出版社。

深奧難懂的學問，卻有些人以為數學是引人入勝的智力遊戲；有些人以為數學是與現實世界毫無關聯的學問，卻有些人以為數學是無往不利的萬應靈丹；有些人以為沒有直接應用價值的數學只是鑽牛角尖的玩意，卻有些人以為只有純理論才配稱得上數學的美名。對於這些見解，你有什麼看法呢？』

2014 年 2 月 27 日另一位作者與曾鈺成先生應香港大學教育學院的邀請，主講一個題為「數味人生」的講座，縷述兩人在大學年代主修數學的一些體會，特別是從中獲致的數學修養，如何在日後從政生涯中處理日常事務上發揮了影響。作者舉了一個事例，是關於房屋署處理公屋分戶的問題。

相信讀者不難瞭解到，香港一直以來都是地少人多，寸金尺土，土地供應不足，以致住屋需求問題不時出現。每當遇上房屋問題時，大家自然倍加緊張。這種情況，不僅適用於市民，亦同樣適用於政府。不管在回歸前或後，每當政府製訂整體社會政策時，房屋政策都被列為重要項目，今屆特區政府更把它列為各項政策的「重中之重」。可惜是，儘管官員不斷設法增加土地供應以呼應住屋需求，問題始終依然存在。不僅在公營房屋的輪候冊上，需求家庭數目不減反增，在地價、樓價以至租住單位的租值，都同樣出現不減反加的現象。

政府一直以來都透過香港房屋委員會控制公營房屋資源的運用，例如限制已入住公共房屋的居民不能隨意要求增撥額外資源，包括除有特殊理由外，不會接受增加住戶人數或分戶。不過，自有公共房屋以來，由於居住環境擠迫而引致的家庭糾紛卻十分普遍。常見的是因欠缺個人空間引起的磨擦，輕則口角，重則動武。這些現象，對房屋署職員來說，司空見慣。這些問題，若沒好好處理，可引致嚴重悲劇。過往的事例弄出人命，也時有發生。所以房屋署職員需小心處理，尤其在住戶要求分戶時，不敢貿然決定。一方面怕若不批准，會釀成悲劇；另一方面，亦擔心若答允要求，便打開缺口，其他住戶會「有樣學樣」，導致一發不可收拾，浪費社會資源。

在「數味人生」的講座上，作者之一憶述其中一個個案：

「一個五口家庭，全是兄弟姊妹，父母早已不在。他們年齡由十多歲至三十多歲左右，差距很大，但終日家嘈屋閉。許多時口角，

還動手打鬥，導致部份家庭成員在精神上大受影響。他們憂慮有天控制不了情緒時，倫常慘劇會發生，故找房屋署求助，希望獲得分戶，編配多一個居住單位，減少共同居住人數，以緩和家庭內的緊張，避免不幸事情發生。」

房屋署經理瞭解情況後，認同情況確屬嚴重，且有潛在風險，但基於過往鮮有一家全是兄弟姊妹關係的住戶分戶，不能妄開先例。若准以兄弟姊妹關係不和為理由分戶，容易引發其他住戶以同樣理由申請，故房屋署經理斷然拒絕要求。可是，由於已有家庭成員以個人物品霸佔單位部分空間，令其他成員難以回家，有家庭成員憂慮繼續下去，情況會惡化，後果堪虞。分戶是燃眉之急，故房屋署前來找作者求助。

作者瞭解到，這個家庭除了關係惡劣，難以修好外，經濟也是一個問題。因為年輕成員要依賴年長的支持，沒能力遷到私人住宅單位。但作為控制社會資源的把關者，房屋署職員可在社會資源和家庭糾紛中，怎樣去取得平衡呢？作者與房屋署經理面談時，經理儘管認為此個案值得同情，但仍然堅持礙於房屋資源有限，恐怕會造成濫用的開端，不接納要求。不過，作者覺得，房屋署經理的顧慮當然重要 ，但我們不能只從一個簡單的角度來處理，否則很容易得到與房屋署經理相同的結論。如果把問題探究多一點，且從多些角度來看，很可能有不一樣的結論。

記得在過去任教中學數學時，同學們常常提出一個問題，就是：「已經跟著你的方向和步驟，怎麼還是解決不了題目呢？」作者的回答是：「我們不能只看問題表面，不妨多搜集已知條件，從多方面聯想，對解題會有幫助。」在這裡，試引用一道數學題目來闡釋這個意思：解

$$\frac{x}{11\times13}+\frac{x}{13\times15}+\cdots+\frac{x}{2009\times2011}=\frac{11}{2011}\text{ 。}$$

要解這條方程，許多同學直覺的做法是把 x 這個未知數抽出來，然後將整條方程式改寫為：

$$x\left(\frac{1}{11\times13}+\frac{1}{13\times15}+\cdots+\frac{1}{2009\times2011}\right)=\frac{11}{2011}$$

這步驟當然沒有問題，問題在於下一步該如何？可惜，許多同學到此止步，

無法再進一步處理。因為，他們明白到，每一項的分母相乘後的積都是很大，若再用最小公倍數來通分母，會很難運算下去。

其實，要處理這條題目，首要注意的，不在於每一項的共同分子 x，而是在於組成每項分母的數字，即 11，13，15。從這些數字可推測到，往後的各項將會分別是由 15×17，17×19，19×21，⋯ 如此類推的數字組成；前一項的第二個數字與後一項的第一個數字相同，一般而言，它們應滿足某一特殊的關係。因此，應從這方面多作聯想。

事實上，$\frac{x}{11\times13}$ 可改寫為 $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{11}-\frac{x}{13}\right)$，而 $\frac{x}{13\times15}$ 則可改寫為 $\frac{1}{2}\left(\frac{x}{13}-\frac{x}{15}\right)$，那豈不是引出了重要的關鍵嗎？就是前項可與後項互相抵銷。所以，原式改寫為：

$$\frac{x}{2}\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{2009}-\frac{1}{2011}\right)=\frac{11}{2011}\text{ 。}$$

跟著，便是：

$$\frac{x}{2}\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{2011}\right)=\frac{11}{2011}\text{ ，}$$

$$\frac{x}{2}\left(\frac{2000}{11\times2011}\right)=\frac{11}{2011}\text{ ，故 } x=\frac{121}{1000}\text{ 。}$$

作者並不是要教大家如何拆解這條數學題目，但期望大家可以看到，在處理數學問題上，有它的一套思考方法，而這套思考方法，也許能協助我們處理生活上其他的問題。

房屋署經理就如同一些同學一樣，只看問題的表面，沒有進一步探究問題更深入的地方，即沒去追查為何產生不和。只是直覺地從人多便會不和來看待問題，猶如只看到有共同的未知數 x 一樣，抽出來便了事。但作者認為，不和總有原因的，故作進一步追查。其後，發覺到一個特殊的情況。這一家五兄弟姊妹，竟是由「不是異父的，便是異母；不是異母的，便是異父」這種罕有而複雜的家庭關係組合而成，那怎麼會不是家無寧日呢？因此，若單以一般家庭不和來處理，是把問題過於簡單化了。

如同上述的數學題目一樣，它絕不是一條簡單的分數加減，而是含有

部份分式的題目，把它簡單化便沒法進一步拆解。於是，作者便抱著有別於對一般家庭不和個案的想法去處理。遂以「後無來者」的概念來遊說經理，希望他能改變決定。這個構思，就如同不純粹考慮分數的加減，而著力於部份分式的運算。從自然角度看，要有這種同父異母或同母異父等等的奇特關係，何止是百分之一、千分之一，恐怕連萬分之一的機會也嫌高。怎麼會「陸續有來」呢？作者這樣的想法，是要把這個案聯繫到一個較廣的層面來處理。

事實上，若有人期望仿效此個案來爭取編配一個額外單位，這樣難度高的組合也能做到，說實話，即使給他又何妨？！要「人為地」營造這樣的背景來取一個額外單位，相信要付出的，不會比得到的少。房屋署職員何需擔心此個案會成為濫用資源的先例呢？！最後，房屋署終於接納個案的要求。從房屋署角度而言，確實是額外多付出了資源；不過，若能避免一宗不幸家庭倫常事故發生，不管是有傷亡情況，或是需要更多其他社會服務的支援，就社會整體成本而言，相比之下是得而不是失。

在處理數學問題時，每一個已知條件，都應有其特殊的意義和角色扮演，若能好好利用，對拆解問題必有幫助。這樣的訓練，其實，對處理日常生活的問題上，也不無幫助。當遇上難解的問題時，能仔細搜集更多的相關資料作深入探究，應能更好地拆解更多的問題。

當日的主持梁貫成教授插入一個問題：在什麼情況下，一家五兄弟姊妹真的可以各人有各人不同的父母？即是說，任何兩名子女不是同父異母，便是同母異父，或是異父異母？顯然，這是可以發生的。譬如說，男戶主結婚五次，每位太太為他生了一個孩子後便離異，男戶主另找一位新太太，於是五兄弟姊妹有一個爸爸，但每人有不同的媽媽。合起來，共有六名男女是爸媽。曾鈺成先生不脫「數學人（maths. major）」本色，進一步提出一個問題：**最少**要有多少名男女是爸媽，才可以一家五兄弟姊妹，各人有各人不同的父母？

喜愛數學的朋友，自然會把問題放在更廣泛的情況下討論：一家有 N 個兄弟姊妹，最少要有多少名男女是爸媽，才可以使這 N 個兄弟姊妹，各人有各人不同的父母？說清楚一點，任何兩名子女不是同父異母，便是同母異父，或是異父異母。男戶主結婚多次，每位太太為他生了一個孩子後

便離異，但孩子由男戶主撫養。男戶主另找一位新太太，同時也收養了新太太原有的子女。固然，這兒也作了一些沒有特別聲明的合理假設，例如每對男女只結婚一次，離婚後不會重拾舊好，每次結合也一定生下一個孩子，而且只生下一個孩子（否則便有同父同母的子女）。就以一家五兄弟姊妹為例。前面提到六名男女是爸媽的情況，但其實可以有五名男女是爸媽的情況。男戶主 A 與女士 A' 結婚，生了 a 之後，A 與 A' 離異，與另一位女士 B' 結婚。A 與 B' 生了 b 之後與 B' 離異，再與另一位女士 C' 結婚，生了 c。但 B' 和 C' 曾與另一名男士 B 結婚，B 與 B' 生了 d，B 與 C' 生了 e。於是，男戶主 A 的一家五兄弟姊妹 a、b、c、d 和 e，各人有各人不同的父母。顯然，五名男女是最少的情況了。一般而言，一家有 N 個兄弟姊妹又如何？

讀數學的人見到婚姻關係，如果撇開羅曼蒂克的聯想，便會想到二部圖（bipartite graph）。一個二部圖 $\mathcal{G}$ 就是一些點，其中某些點用線連接起來；這些點分成兩組，在同組的點是沒有連接的。大家都明白在這情況下，一組點代表男士，另一組點代表女士，連接的兩點代表兩人（曾）有夫妻關係。不如讓我們更加重一些「數學味」，把 $\mathcal{G}$ 其中一組的點的集合稱作 $\mathcal{V}_1$，另一組的點的集合稱作 $\mathcal{V}_2$，連接點的線組成的集合稱作 $\mathcal{E}$。設 $\mathcal{V}_1$ 和 $\mathcal{V}_2$ 的數目分別是 m 和 w，且 $m+w=S$。我們正在討論的情況，每兩點頂多只有一條線連接，這樣的圖稱作單圖（simple graph）；$\mathcal{V}_1$ 其中有一點 A 與 $\mathcal{V}_2$ 的所有點連接，其他各點都與 $\mathcal{V}_2$ 的某些點連接，所以 $\mathcal{G}$ 的每兩點都必定通過某些別的點連接起來，這樣的圖稱作連通圖（connected graph）〔見圖 1〕。

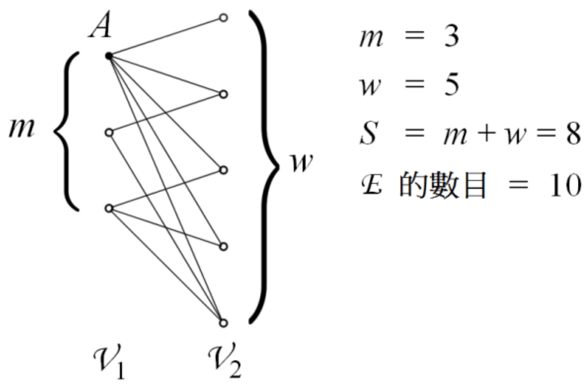

圖 1

根據圖論（graph theory）的知識，由於 $\mathcal{G}$ 是一個單連通圖，可以推斷

$\mathcal{E}$ 的數目不小於 $S - 1$，也不大於 $\left[\frac{S^2}{4}\right]$，這兒的符號 $\left[\frac{S^2}{4}\right]$ 表示 $\frac{S^2}{4}$ 的整數部份，證明不贅。那個看似「故弄玄虛」的 $\left[\frac{S^2}{4}\right]$，其實毫不神秘，它只不過是滿足 $m + w = S$ 這條件底下，$m \times w$ 能取得的最大值。以圖論語言，就是說 $\mathcal{V}_1$ 和 $\mathcal{V}_2$ 的點的數目相同或只是相差一。

回到我們正在討論的情況，$\mathcal{E}$ 的數目就是 N，因此，我們知道 $N \leq \left[\frac{S^2}{4}\right]$ 。要解決的問題是給定 N ，找出 S 的最小值。這個最小值，便告訴我們最少要有多少名男女是爸媽，才可以使一家 N 個兄弟姊妹，各人有各人不同的父母。它也是滿足 $m \times w \geq N$ 這條件底下， $m + w$ 能取得的最小值。例如，最少要有 5 名男女是爸媽，才可以使一家 5 個兄弟姊妹，各人有各人不同的父母；最少要有 7 名男女是爸媽，才可以使一家 12 個兄弟姊妹，各人有各人不同的父母〔見圖 2〕，餘此類推。

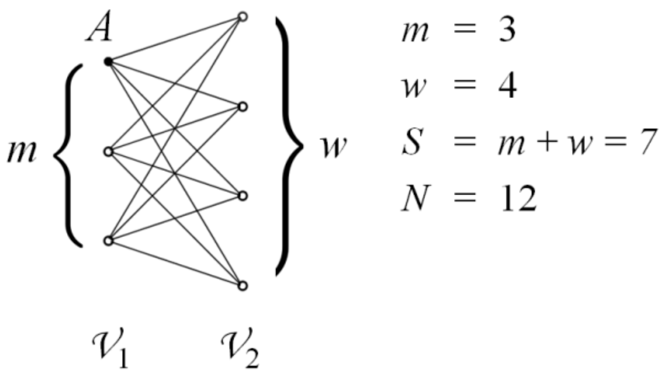

圖 2

粗略地估算，N 是鄰近 $\frac{S^2}{4}$ 的整數，故 S^2 是鄰近 $4N$ 的整數，所以 S 是鄰近 $2\sqrt{N}$ 的整數。再作一點仔細分析，可以更直捷了當得出答案。如果 $N = k^2$，則答案是 $2k$ ；如果 $k^2 < N \leq k^2 + k$ ，則答案是 $2k + 1$ ；如果 $k^2 + k < N < (k + 1)^2$ ，則答案是 $2k + 2$ 。譬如說，最少要有 20 名男女是爸媽，才可以使一家 100 個兄弟姊妹（「百子千孫」），各人有各人不同的父母；最少要有 29 名男女是爸媽，才可以使一家 200 個兄弟姊妹，各人有各人不同的父母。

從上面利用圖論語言，也知道頂多只能有多少名男女是爸媽，可以使這 N 個兄弟姊妹，各人有各人不同的父母，答案是 $N + 1$ 。一個最簡單

的明顯特例，就是一位男士曾和 N 位女士結婚，每次生下一個孩子。再多作一點分析，還可以知道多一些資料，例如其中有一位至少要結婚幾次？對這個問題感興趣的讀者，可以多作隨意探索。

首作者電郵：mathsiu@hkucc.hku.hk