探討學生錯誤：一元一次方程

郭思齊
香港數理教育學會

（一） 緒論

學生的解題過程，雖非題題都是真正的解難（Mayer & Wittrock, 2006 p.287），實一論證過程。即使題目並非證明題，亦需要學生由已知條件推論，直至找到（學生認為合理的）答案。若學生解題過程常有誤解，則可知該等「例行步驟」（routine steps or procedures），對此學生而言，並非如此例行。下文將以一元一次方程的各種解題過程中出現問題時的師生交談，以 Toulmin 的論證架構（1958/1993）分析學生的論證模式，冀望有解決方法。

（二） 理論依據

Toulmin 的論證架構，用途之一，是探討各種論證中，以何種推理法則（inference rule，或稱 warrant），讓資料（data）支持宣稱（claim）。論證模式，粗略論之有三：其一演繹，其二溯因，其三歸納。

演繹者，由資料和法則（rule）建立宣稱。（Pedemonte, 2007）。

溯因者，以觀察所得的事實為資料，建立宣稱。（Pedemonte, 2007; Magnani, 2001; Peirce, 1960; Polya, 1962）。

歸納者，以幾個特例為資料，用概括建立宣稱。（Pedemonte, 2007; Fann, 1970; Polya, 1954）

Harel（2001）又細分歸納為兩類：「過程模式歸納法」（process pattern generalization）及「答案模式歸納法」（result pattern generalization）。

（三） 一元一次方程

現時課程（2000），限制小學只可教最多兩步的方程。所謂一步，是對等式兩邊運算一次，該運算為加減乘除四則之一。例如：

兩邊減	兩邊加	兩邊除	兩邊乘
$x + 3 = 7$ $x + 3 - 3 = 7 - 3$ $x = 4$	$x - 5 = 2$ $x - 5 + 5 = 2 + 5$ $x = 7$	$2x = 6$ $2x \div 2 = 6 \div 2$ $x = 3$	$x/3 = 5$ $x/3 \times 3 = 5 \times 3$ $x = 15$

（三之一） 兩邊運算的表達

不過，倘若學生解「兩邊加」的題目時，把還原運算寫成 $5 + x - 5 = 2 + 5$，或者解「兩邊乘」時，寫成 $3 \times x/3 = 5 \times 3$，則處理「兩邊減」和「兩邊除」時，會出現 $3 - x + 3 = 7 - 3$ 及 $2 \div 2x = 6 \div 2$，便有對話如下：

師：「你咁樣寫不得嘎！」
生：「怎解不得？」
師：「前減後同後減前相不相等呀？」
生：「（想了一會，語帶不肯定）好似…不相等…吧（？）」
師：「既然兩者不相等，咁怎解你會咁樣寫？」
生：「吓？我上一題都是咁寫（指住兩邊加的題目）。」
師：「你上一題梗是得啦。」
生：「怎解上一題得，呢題不得？」
師：「好。前加後同後加前相不相等？（學生點頭）相等的先可以寫。」
（然後老師要求兩邊都按運算先後表達。）

「怎解上一題得，呢題不得？」，說明學生觀察到的，是由「左邊加在左，右邊加在右」對於「兩邊加」可行的過程，歸納成「左邊運算在左，右邊運算在右」的解難方式，並視之為必然可行。嚴格來說，學生在「兩邊減（或除）」的做法，不完全是錯誤運算——至少知道兩邊應作何種運算，只是二元運算次序不分，但此等「過程模式歸納法」，已化運算為模式，失卻解方程中逆運算的原意。

（三之二） 分數處理孰先孰後

當方程牽涉兩步，多為乘除配加減，即未知數先做乘除，再做加減，才等於右邊的值。至於加減配乘除者，因為小學少教括號，更不會教拆括號，所以此類題目在小學較少。常見的當然有：

乘配減：先加後除	除配加：先減後乘
$2x - 5 = 11$ $2x - 5 + 5 = 11 + 5$ $2x = 16$ $2x \div 2 = 16 \div 2$ $x = 8$	$x/4 + 3 = 8$ $x/4 + 3 - 3 = 8 - 3$ $x/4 = 5$ $x/4 \times 4 = 5 \times 4$ $x = 20$

不過，當配加的兩項位置互換，則有以下情況：

$$3 + x/4 = 8$$
$$3 + x/4 \times 4 = 8 \times 4$$
$$3 + x = 32$$
$$3 + x - 3 = 32 - 3$$
$$x = 29$$

並有以下對話：

師：「怎解你第二步要乘？」
生：「有除嘛，所以要乘。」
師：「3 要乘嗎？」
生：「不必，因為只有 x 被 4 除。」
師：「但你乘以 4 喎。」
生：「是啊，用來還原 x 嘛。」
師：「你乘的 4，是對 x 做定怎樣？」
生：「對 x 做。」

於是，把題目換成 $x/4 + 3 = 8$，結果順利做完。

師：　　「答案一樣嗎？」
生：「不。」
師：「焉個先啱？」
生：（猶豫中，指向 20）「呢個？」
師：「你自己驗算下。」
生：（驗算完）「哦，原來是呢個。即是應該處理 3 先？原來不是處理咗分母先…但怎解之前見分母就處理分母？」
師：「以前只有分母，或者牽涉分母的喺句頭而不是尾。」

「原來不是處理咗分母先…但怎解之前見分母就處理分母？」，足見學生未理解處理次序。而再度計算，則顯示學生解方程的過程，習慣由最近等號的項開始，並且把解方程的過程理解為由最近等號的項開始。此等「過程模式歸納法」，忽略了天秤原理「兩邊進行相同運算」裏「邊」的含意。如是者，$1/2 + x/3 = 1$ 亦遇到相同問題，會把方程寫作 $1/2 + x = 3$。

（三之三） 未知數正或負

可是，即使學生充分掌握何種運算先執行，仍會遇上一些難題。形如 $7 – 2x = 13$ 者，學生縱使知道兩邊減 7，亦難免寫成 $2x = 6$，推論 $x = 3$。故有以下對話：

師：「兩邊一齊減，做得不錯，但怎解 $2x = 6$？」
生：「（左邊）減咗 7，7 減 7，無野嘛。無野就剩返 $2x$。」
師：「恁個減號呢？$2x$ 前面的減號又怎樣處理？」
生：「下？減咗嘛，減咗無咗囉。」
師：（寫幾條形如 $a – b – a$ 的題目）「好，你做做呢個先。」
生：「即是都是剩返中間項，而且有負。」
師：「個負其實怎來？」
生：「因為不夠減。」
師：「如果同原式比較呢？前同後都相減咗。」
生：「剩返中間有個負號。我知，就是中間該個負號。」
師：「既然數字前的減號要留，於是 $2x$ 前面的減號…」
生：「要留，變成負號。不過總覺得怪怪地。」

當中 $a – b – a$ 化為實際數字算式，是為了幫助仍然只用「直線式運算流程」的學生，由於極少需要前後項對調，難以理解 $7 – 2x – 7$ 為何物，更遑論思考帶負的未知數。要使學生理解運算的原理，有時不妨帶領學生做做實驗，讓其觀察結果並推敲模式（結果模式歸納法），並要求學生返回運算的本質，以運算律再思考推敲時的正誤（演繹法），從中讓學生接觸從歸納轉變為演繹的過程，並加強學生以邏輯推論的信心，即使碰到未見過的情況，仍能得出正確結果。

（三之四） 移項迷思

待一切運算處理妥當，新問題又會隨著新題型出現：$3x + 5 = 2x + 7$。學生主要會出現下列兩類解法：

$3x + 5 = 2x + 7$	
$3x = 2x + 2$ $x = (2x + 2)/3$	$3x = 2x + 12$

故有以下一組對話：

師：　　「你做完未呀？」
生：「做完。」
師：「求到 x 值嗎？」
生：（猶豫兼苦惱，不想開口）「未呀…」
（努力尋找出錯的步驟，徒勞無功）
師：「其實你每步做得不錯，但你將兩邊除以 3，搵到 x 嗎？」
生：「所以就不應該除以 3？但不是要搵 x 耶？x 响左邊…又不是喎…唉呀，不知了。」
師：「你不如考慮下 $2x$ 怎樣處理。」
生：「$2x$？下？哦，又是移項！唉，得了，計到了。怎解成日要移項恁麻煩？」

以及另一組對話：

師：　　「怎解右邊有 12？怎得出？」
生：「移項，令左邊只有 $3x$。」
師：「你移咗乜項？怎樣移？」
生：「5 囉。左邊有+5，移過去有…咦，唉呀，計錯數。」

上段對話，說明學生對解方程的想法根深柢固——「x 响左邊」，而左邊亦只有 x，右邊有甚麼也沒關係。此等結論，源自「答案模式歸納法」——歸納出答案必在左邊；不在，即錯。下段對話，「移項」一詞，對未完全掌握移項以運算方式執行的學生，易使其運算混亂。「左邊有+5」，下句其實是「又有等號，恁相等的自然可以出現返等號另一邊。」。倘若「移項」取代為「以 xx 運算方式把 xx 項與 xx 項簡化」，應可減少「等號表示相等」但不知何物相等的誤解。當然，對等號更嚴重的誤解，是每次寫下一行，總要在最前面寫等號。此時，等號淪為「開新一行」的指示符號，沒有留意以往行與行間是等值關係，但解方程只有等號兩邊等值，上下句間沒有等值——即又出現「過程模式歸納法」。

欲解決以上問題，可考慮以下解法（Schmidt & Weidig, 2005）：

$$
\begin{array}{r|l}
\dfrac{1}{2}+\dfrac{3(x-2)}{5}=\dfrac{2x+3}{4} & \\
10+12(x-2)=5(2x+3) & \cdot 20 \\
10+12x-24=10x+15 & \\
2x=29 & -10x+24 \\
x=\dfrac{29}{2} & -10
\end{array}
$$

做法是，在解方程的「正文」旁，在右另闢一欄，記下由上一行做了何種運算而得出本行。此舉能提醒學生，每行之間的變化不再亂寫等號，後來的運算寫在後，無須再分辨處理分數（分母）的先後，要處理的項都記下並知道方法，又能檢查自己的（逆）運算會否不合理，每一行的兩邊每項可有未完成的運算。無論項數多少，都可根據右欄提示，確保沒有錯用運算或違反運算優先次序。簡而言之，即回到天秤原理的運算方式，以演繹法論證得出聲稱，而無須再以任何模式的歸納法猜想聲稱。

參考文獻

Fann, K. T. (1970). *Peirce's theory of abduction*. The Hague: Martinus Nijhoff.

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. In S. Campbell, & R. Zaskis (Eds.). *Learning and teaching number theory.* In C. Maher (Ed.). *Journal of Mathematical Behavior* (pp. 185–212). New Jersey: Ablex Publishing Corporation.

Magnani, L. (2001). *Abduction, reason and science. Process of discovery and explanation*. Dordrecht: Kluwer.

Mayer, R. E. & Wittrock, M. C. (2006). Problem solving. In P. A. Alexander & P. H. Winne, (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 287–303). New York: Macmillan.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed?. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 23–41.

Peirce, C. S. (1960). *Collected papers*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton: Princeton University Press.

Polya, G. (1962). *How to solve it?* Princeton: Princeton University Press.

Schmidt, A. & Weidig, I. (2005). *Lambacher Schweizer: Mathematik für Gymnasien - Ausgabe für Bayern 6. Schuljahr, Lösungen und Materialien*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag

Toulmin, S.E. (1958/1993). *The use of argumentation.* Cambridge: Cambridge University Press.

作者電郵：charleskwok1018@gmail.com