不帶餘除法的推廣

馮振業
香港教育學院數學與資訊科技學系
陳玄玉
前教師、現為全職家長
鍾保珠
香港教育學院全日制學生

緒言

香港小學課程由二年級開始教授除法的概念（香港課程發展議會，2000），在這個學習階段中，學生可透過實際操作的分物活動了解除法有均分和包含兩種意義。在整數的世界中，商和餘數都只可能是整數，故而不會觸及不帶餘的除法，「被除數 ÷ 除數 = 商 ... 餘數」的帶餘除法關係式，只會在整除的情況下與不帶餘除法一致。

及至五年級，學生學習的分數除法，卻是二年級整數除法的雙軌延伸。一方面是引入不帶餘除法，其中不論被除數和除數是否整數，只要容許商是一個分數，即可確保餘數是 0，令除法關係式變成「被除數 ÷ 除數 = 商」；另一方面是把整數帶餘除法，推廣至分數帶餘除法，在要求商為整數的前提下，使「被除數 ÷ 除數 = 商 ... 餘數」的關係式，可以在被除數或除數含分數的情況下成立。

翻閱坊間的課本，不難發現有關分數除法的教學布局，甚少對分數除法概念有均分和包含兩種意義，作出完整的解說。至於相關的運算法則是如何從已有知識中深化和推廣，更是難得一見。本文嘗試檢視除法意義的學理基礎，說明在均分及包含兩種意義之下，如何從整數不帶餘除法推廣至分數不帶餘除法。至於帶餘除法的推廣，見於馮（2008），此處不贅。

以均分的理解推廣不帶餘除法

均分是指定份數，求每份有多少的分物方法。在除數是整數的時候，不論被除數是否整數，理解方法都沒有太大差別。因此，整個推廣的過程，可以分以下幾種情況順序進行：

情況一　被除數是整數，而且是除數的倍數

這情況跟二年級學習的除法概念相同，被除數、除數和商都是整數。

例一　8 塊巧克力，平均分成 2 袋，每袋有巧克力多少塊？
這個情況對應的算式是：

$$\begin{aligned} & 8 \div 2 \\ = & \ 4 \end{aligned}$$

情況二　被除數是整數，但不是除數的倍數

當被除數不是除數的倍數時，就需要在均分的理解下確立「$a \div b = \frac{a}{b}$」（$b \neq 0$）的關係式。想像如何把 a 張紙，平均分成 b 等份，較有系統的方法就是每張紙都平均分成 b 等份，然後每張紙各取 1 份（即 $\frac{1}{b}$ 張紙）。這樣的做法，不管 a 和 b 是多少，都以先求單位分數 $\frac{1}{b}$ 入手，然後得出 a 個 $\frac{1}{b}$，就是 $\frac{a}{b}$ 了。

例二　2 塊巧克力，平均分成 3 袋，每袋有巧克力多少塊？

這裡就好像先把 2 塊巧克力疊在一起，然後均分 3 份（圖 1），再按照圖 2A 至圖 2C 的過程每袋各取 1 份，這樣 2 塊巧克力就平均分成了 3 袋。分物的結果顯示，每袋有巧克力（$\frac{1}{3} \times 2$）塊，即 $\frac{2}{3}$ 塊巧克力，而這個情況對應的算式是：

$$\begin{aligned} & 2 \div 3 \\ = & \ \frac{1}{3} \times 2 \\ = & \ \frac{2}{3} \end{aligned}$$

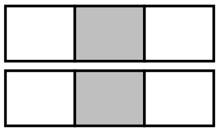


圖 1

圖 2A

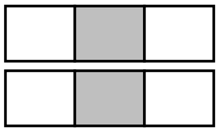


圖 2B

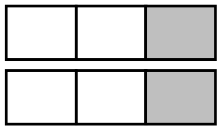


圖 2C

情況三　被除數是真分數或假分數，而且分子是除數的倍數

只要將涉及的單位分數看作一個單位，就能沿用情況一的處理手法。

例三　$\frac{4}{5}$ 塊巧克力，平均分成 2 袋，每袋有巧克力多少塊？

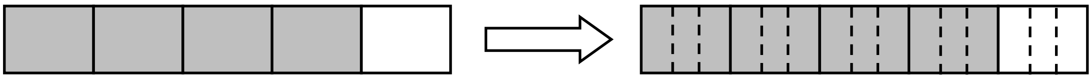
以 $\frac{1}{5}$ 塊巧克力作一個單位，$\frac{4}{5}$ 塊巧克力即 4 個單位，把 4 個單位均分 2 份，每份有 2 個單位，即是 $\frac{2}{5}$ 塊巧克力。運用單位分數，使分數計算回到熟悉的整數計算的策略，效果顯而易見。這個情境對應的算式是：

$$\begin{aligned} & \frac{4}{5} \div 2 \\ = & \frac{2}{5} \end{aligned}$$

情況四　被除數是真分數或假分數，但分子不是除數的倍數

當被除數分子不是除數的倍數時，想法仍舊是如何把問題，轉化為已知如何處理的情況。只要以擴分（或約分）的方法，把被除數分子變成除數的倍數，就可沿用情況三同樣的手法進行除法計算。

例四　$\frac{4}{5}$ 塊巧克力，平均分成 3 袋，每袋有巧克力多少塊？



把 4 個 $\frac{1}{5}$ $\xrightarrow{\text{擴分}}$ （4 × 3）個 $\frac{1}{5\times3}$，均分 3 份，每份有 4 個 $\frac{1}{5\times3}$。

圖 3

這個情境對應的算式是：

$$
\begin{aligned}
&\frac{4}{5} \div 3\\
=\ &\frac{4\times3}{5\times3} \div 3\\
=\ &\frac{4}{5\times3}\\
=\ &\frac{4}{15}
\end{aligned}
$$

處理好上述四種情況，就能對整數或分數隨意等分整數份，分數乘法運算的定義，便可依此而生。不管 c 是整數或分數，定義 $c \times \dfrac{a}{b}$ 為

$$c \div b \times a$$

當除數是分數時，就得把低年級均分整數份的概念，巧妙地推廣至均分分數份的概念。現時坊間的課本，絕少觸及這方面的解說。然而，值得高興的是，這部分的功夫，卻是出人意表地簡單。只要懂得分數乘法，介紹均分分數份的意義及顛倒相乘法則的推導，竟然可以無需區分被除數是否整數，一氣呵成地完成。

例五　8 塊巧克力，平均分成 $\frac{2}{3}$ 袋，每袋有巧克力多少塊？

儘管例五和例一的差別，只是把「2 袋」換成「$\frac{2}{3}$ 袋」，對大部分學生，甚至教師而言，均分 2 袋十分容易，均分 $\frac{2}{3}$ 袋，卻不知可以如何理解，

兩者之間活像出現了不可踰越的鴻溝。要把均分整數份，推廣至均分分數份，必須找到一種對「均分」的詮釋，一方面能滿足在均分整數份時，與熟知的理解一致，另一方面又能滿足在均分分數份時，提供之前欠缺的具體意義。

對應例一的計算，以下說法容易令人接受：

「8 塊巧克力，平均分成 2 袋，要知每袋有巧克力多少塊，可用 $8 \div 2$ 計算。」

將它輕微調整成以下說法，相信阻力也不會太大：

「8 塊巧克力相當於（即是）2 袋，要知每袋有巧克力多少塊，可用 $8 \div 2$ 計算。」

如能成功闖過此關，例五的計算，即可以在下列理解之下進行：

「8 塊巧克力相當於（即是）$\frac{2}{3}$ 袋，要知每袋有巧克力多少塊，可用 $8 \div \frac{2}{3}$ 計算。」

以畫圖方法推敲如下：

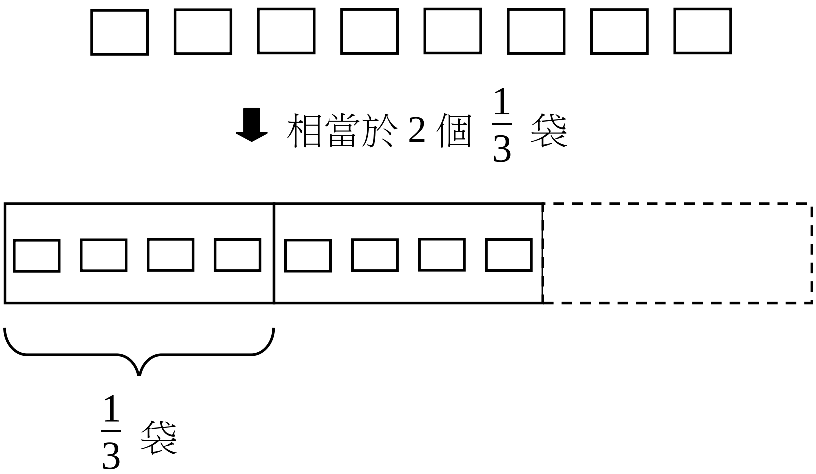


圖 4

根據圖 4，依題意就得把 8 塊巧克力均分入 2 個長方格，每格內就有 $\frac{1}{3}$ 袋巧克力。此數的 3 倍，就是 1 袋巧克力的數量。因此，每 1 袋有巧克力（$8 \div 2 \times 3$）塊。按分數乘法的定義：$c \div b \times a = c \times \frac{a}{b}$，每 1 袋有巧克

力（$8 \times \frac{3}{2}$）塊。

由此得出對應的算式就是：

$$
\begin{aligned}
& 8 \div \frac{2}{3} \\
= \; & 8 \times \frac{3}{2} \\
= \; & 12
\end{aligned}
$$

讓學生經歷以上的過程，在計算的步驟中便能看見 $8 \div \frac{2}{3}$ 即是 $8 \times \frac{3}{2}$，顛倒相乘法則瞬即活現眼前。如果讓學生檢視更多例子（除數是任何分數），不難發現，一般而言：不管 a 是整數或分數，算式「$a \div \frac{b}{k}$」（b，$k > 0$）代表 a 均分 $\frac{b}{k}$ 份，每一份的數量，其計算方法是「$a \times \frac{k}{b}$」。

以包含的理解推廣不帶餘除法

包含是指定每份的數量，求可得多少份的分物方法。與均分的情況不同，包含的理解不必刻意分開處理被除數 a 和除數 b 的各種情況，只需緊抱以下四句等價命題即可：

1. $a \div b = c$。
2. a 包含 c 個 b。
3. a 是 b 的 c 倍。
4. 以 b 為 1 個單位，a 即相當於 c 個單位。

在操作層面而言，第四句提供了具體的方法，讓學生藉畫圖或鋪貼活動找到 c。儘管如此，要從這四個命題直接推導顛倒相乘法則，一點也不容易。考慮到 c 不是整數時所引發的理解上的困難，包含除法的推廣，仍需分階段按以下的順序進行：

情況一　被除數和除數都是整數，而且被除數是除數的倍數

這情況在二年級已經學過，被除數、除數和商都是整數。

例六　6 塊巧克力，每 3 塊為一包，共有多少包？

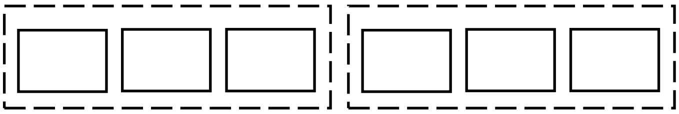


圖 5

這個情境對應的算式是：

$$6 \div 3$$
$$= 2$$

情況二　被除數和除數都是整數，但被除數不是除數的倍數

例七　5 塊巧克力，每 2 塊為一包，共有多少包？

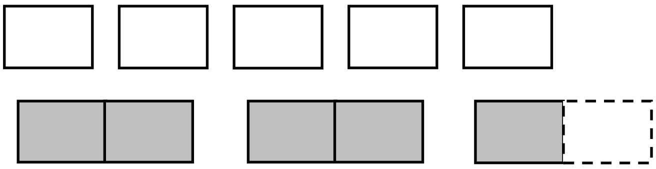


圖 6

透過圖 6 的結果，可讓學生直接看到 $5 \div 2 = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$，從而在包含的理解下確立「$a \div b = \frac{a}{b}$」（$b \neq 0$）的關係式。

情況三　被除數和除數都是同分母分數

例八　$\frac{4}{5}$ 塊巧克力，每 $\frac{2}{5}$ 塊為一包，共有多少包？

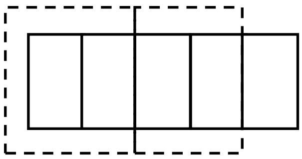


圖 7

這個情境對應的算式是：

$$= \frac{4}{5} \div \frac{2}{5}$$
$$= 2$$

只要將涉及的同一個單位分數看作一個單位，即可沿用情況一或二的處理手法。以 $\frac{1}{5}$ 塊巧克力作為一個單位，要知 $\frac{4}{5}$ 塊巧克力是 $\frac{2}{5}$ 塊巧克力的多少倍，即是要知 4 個單位是 2 個單位的多少倍，算式顯然就是 $4 \div 2$。由此可見，當同分母真分數或假分數相除時，只需把分子依序相除即可。

情況四　被除數和除數是異分母分數

處理異分母分數相除，可藉通分回到同分母分數相除的情況。這種手法在處理異分母分數加減計算時已然碰過，此時重施故技，可收溫故知新的效果。從運算的過程，學生仍然可以看到顛倒相乘法則的浮現，只是推論的過程也許較均分分數份的情況來得迂迴罷了。

例九　$\frac{4}{5}$ 塊巧克力，每 $\frac{2}{3}$ 塊為一包，共有多少包？

這個情境對應的算式就是：

$$
\begin{aligned}
& \frac{4}{5} \div \frac{2}{3} \\
&= \frac{4 \times 3}{5 \times 3} \div \frac{2 \times 5}{3 \times 5} && \text{（通分）} \\
&= \frac{4 \times 3}{2 \times 5} && \text{（分子依序相除）} \\
&= \frac{4 \times 3}{5 \times 2} && \text{（乘法交換性質）} \\
&= \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} \\
&= \frac{12}{10} \\
&= 1\frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

結論

從整數不帶餘除法推廣至分數不帶餘除法的過程，是一個頗具深度的數學歷程。本文的分析，是由二年級對整數除法的理解入手，過渡到五年級對分數除法的理解，整個除法的發展過程用圖總結於附錄，說明讓學生親歷這個過程並非遙不可及。做與不做，端視教師是否只把教數學，當作把數學的概念和程序硬塞進學生腦袋的工作。如果學生都能體會數學知識

皆可自己動手創造，那怕是均分分數份，抑或是顛倒相乘法則，都不會成為學習的絆腳石了。

參考資料

課程發展議會（2000）。《數學課程指引（小一至小六）》。香港：教育局。

馮振業（2008）。小學帶餘除法的教學。《數學教育》，27，34－46。

首作者電郵：cifung@ied.edu.hk

附錄

均分

均分整數份

● 整數 ÷ 整數

情況一　被除數是除數的倍數

$8 \div 2$

情況二　被除數不是除數的倍數

$2 \div 3$

$= \frac{2}{3}$

確立關係式：

$a \div b = \frac{a}{b}$

● 分數 ÷ 整數

情況三　被除數分子是除數的倍數

$\frac{4}{5} \div 2$

運用單位分數的策略回到情況一

情況四　被除數分子不是除數的倍數

$\frac{4}{5} \div 3$

把被除數分子擴分成除數的倍數回到情況三

處理均分整數份的四種情況後，就能帶出分數乘法的定義：

$c \times \frac{a}{b} = c \div b \times a$

均分分數份

● 整數或分數 ÷ 分數

$8 \div \frac{2}{3}$

$= 8 \div 2 \times 3$

$= 8 \times \frac{3}{2}$

藉分數乘法定義
確立顛倒相乘法

包含

● 整數 ÷ 整數

情況一　被除數是除數的倍數

$6 \div 3$

情況二　被除數不是除數的倍數

$5 \div 2$

$= \frac{5}{2}$

確立關係式：

$a \div b = \frac{a}{b}$

● 分數 ÷ 分數

情況三　被除數和除數都是同分母分數

$\frac{4}{5} \div \frac{2}{5}$

$= 2$

分子依序相除

情況四　被除數和除數是異分母分數

$\frac{4}{5} \div \frac{2}{3}$

藉通分回到情況三，
確立顛倒相乘法則