

淺談「窮舉法」

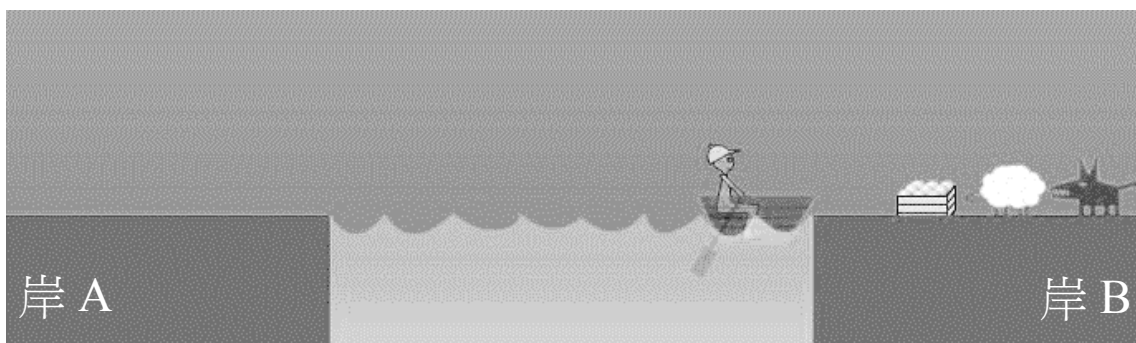
陳偉康

香港教育學院數學與資訊科技學系

說到以窮舉法來解決數學問題，大家都會感到既麻煩、複雜，又相當費時。但事實上，在解決很多日常生活中的(數學)問題時，窮舉法可能是最簡單，又或者是唯一的方法。當然，我們日常使用窮舉法，都只能解決一些規模較小的問題，在一些規模相對較大的問題時，我們則要使用電腦協助計算。而有效運用窮舉法，就是學生必須掌握的解難策略。

在本文章中，我將透過兩個大家熟悉的問題，跟大家探討窮舉法的使用。

問題一：過河問題

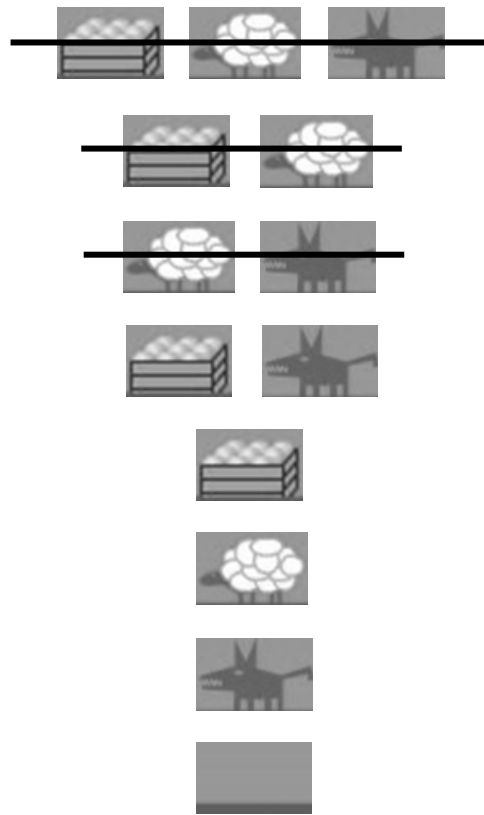


圖片源自 <http://www.plastelina.net/game1.html>

以上是一個大家很可能玩過的遊戲，船夫每次只能把狼、羊或菜送到對岸，但當人不在時，羊會把菜吃光，狼又會把羊吃掉。這遊戲是要求玩家控制船夫，把狼、羊及菜都安全送抵對岸。回答這個問題分兩個層次，第一，能否完成任務？第二，若能夠，如何以最少的來回次數完成？

基本上透過反覆嘗試，大家都不難找到其中一個方法可以完成任務。餘下的第二部分可使用『圖論』協助找出答案。方法如下：

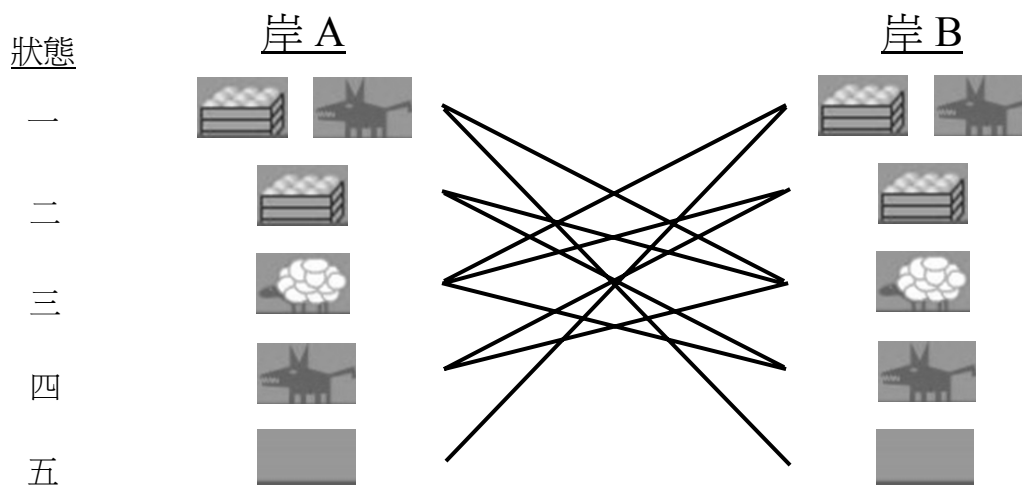
- (1) 以 A 及 B 表示兩岸，圖的左為岸 A、右邊為岸 B。首先考慮船夫在岸 A 時，岸 B 可能出現的情況（見圖一）。



圖一

因岸上有狼、羊及菜，本應共有八個不同的狀態，但若船夫不在場時，首三個狀態是不可能出現的，故此，這些狀態可以剔除。同樣地，當船夫在岸 B 時，岸 A 也只可出現相同的五個狀態。

- (2) 我們把該十個狀態繪畫在圖二中，並以直線把「彼鄰」的狀態連接。（即船夫從岸 A (B) 划船到岸 B (A) 一次，其中的一個狀態便轉換到另一個狀態。）例如：狼在岸 A，船夫、羊及菜在岸 B；船夫運菜到岸 A，岸 B 只剩下羊；這時，岸 A 的狼（狀態四）與岸 B 的羊（狀態三）稱為彼鄰，兩者以直線連接。結果，我們可繪出下圖：



圖二

- (3) 剩下來的就是從岸 A 的狀態五（即船夫、狼、羊及菜都在岸 B），以最少划船次數，移至岸 B 的狀態五（即船夫、狼、羊及菜都在岸 A）。完成這個步驟，我們需要運用『圖論』中尋找最短距離的算法，這個算法使用上窮舉的概念；簡單來說，就是把所有可能性羅列出來。下表展示整個運算過程：

A 五	B 一	A 三	B 二	A 四	B 三	A 一	B 五
			B 四	A 二			

表一

首先把「A 五」放於上表的最左列，然後把所有與「A 五」彼鄰的狀態（只有「B 一」）放於第二列；再把所有與第二列彼鄰，而又未在表上出現的狀態，放在第三列。如此類推，直至「B 五」（即目標）出現為止，便找到答案。按表一所列的結果，船夫要完成任務，最少要划船七次，並有兩個不同的最優答案。

問題二：量水問題

這個問題在電影「虎胆龍威 3」的情節中也曾出現，布斯韋利斯與森姆積遜在劇中要利用兩個分別 3 及 5 加侖沒有刻度的膠桶，量出 4 加侖水來。這題同樣分為兩部分。首先，能否完成任務？第二，若能夠，如何以最少次數完成？

我們先解決第一部分：若注滿 3 加侖的膠桶 n 次，及倒去 m 次 5 加侖水，剩下在膠桶中的水應為 $3n - 5m$ ；相反，注滿 5 加侖的膠桶 n 次及倒去 m 次 3 加侖水，剩下在膠桶中的水應為 $5n - 3m$ 。不管是以上哪個情況，剩下的水的體積皆為 3 及 5 的線性組合，即必為 3 及 5 的最大公因數的倍數（這是基礎數論中的結果，我們在此省略）。因 3 和 5 的最大公因數為 1，而 4 是 1 的倍數，故此，任務必能完成。剩下來的就是如何以最少次數量得 4 加侖水？

這又是窮舉法出場的時候，我們以 $[x, y]$ 表示 3 加侖及 5 加侖水桶分別載有 x 及 y 加侖的水，並假定兩個膠桶最初都是空的，即開始時 $x = y = 0$ （見表二中的第一列），再窮舉出往後的可能性。

第一步，我們只要考慮把水注滿兩個桶的其中一個，這時只可能出現的只有 $[3, 0]$ 及 $[0, 5]$ （見表二中的第二列）。其後考慮把水從載有水的桶中，倒掉或倒進另一個桶，及把水注進未滿的水桶，最多共有 6 個可能。而在較前列曾出現的狀態，毋須重覆列出。即考慮緊接 $[3, 0]$ 之後的狀態時，因 $[0, 0]$ 已在表中，我們不需再列出把 3 加侖桶中的水倒掉的情況。同時，因 3 加侖的水桶已滿，再無法注水。故此，剩下來的就只有把 3 加侖桶中的水倒進 5 加侖的桶中，得 $[0, 3]$ 及 把水注入五加侖的桶中，得 $[3, 5]$ 。按這個原則，把往後可能出現的狀態逐一列出，直至其中一個桶中出現 4 加侖的水，任務則告完成。

[0,0]	[3,0]	[0,3]	[3,3]	[1,5]	[1,0]	[0,1]
		[3,5]				
	[0,5]	[3,5]				
		[3,2]	[0,2]	[2,0]	[2,5]	[3,4]

表二

從表二可見，使用兩個分別 3 加侖及 5 加侖的水桶，最少只須六步，便可量出 4 加侖的水。

以上的兩個都是人所共知的數學遊戲，我們都可使用窮舉法，尋找它們的最優解，並且計算過程也毫不繁複。這說明只要找到一個具系統性的方法，我們便能有效地解決複雜的問題。

參考資料

Enumerate。《國防科技大學 ACM/ICPC 高級演算法程式設計競賽線上判題系統》，
<http://acm.nudt.edu.cn/~twcourse/EnumerateSearch.html>。

Wolf sheep & cabbage. *Plastelina*. <http://www.plastelina.net/game1.html>

最短路問題。《維基百科》，<http://zh.wikipedia.org/zh-hk/最短路問題>。

《批踢踢實業坊》，<http://www.ptt.cc/bbs/logic/M.1155913409.A.576.html>。

Die Hard with a Vengeance. *Wikia*.

http://diehard.wikia.com/wiki/Die_Hard_with_a_Vengeance

作者電郵：darickschan@gmail.com