用概率解讀身邊事件
——一些成功例子和一些未完成的工作

黃毅英
香港中文大學課程與教學學系
張僑平
香港中文大學課程與教學學系

1982 年蕭文強和林建兩位老師出版了《概率萬花筒》，它一直爲用概率解讀身邊事件之經典，爲人津津樂道，曾多次重印[1]。這種解讀有很大的樂趣，例如 1990 年代初香港的選舉熱熾起來，1993 年的數學會考卷一題第 13 題便是關於比例代表制的（並非筆者擬題）。在 1980 年代開始，首筆者受到《概率萬花筒》的影響（當時亦曾以數學科召集人的身份請蕭老師到數理教育學會介紹該書），東施效颦，也作過一些嘗試，有些成功，亦有些不成功的例子。今略作介紹與讀者分享。

——成功的例子——

一、 用餐問題

有時到餐廳用膳，往往人太多找不到座位，但私下和老闆交談，他卻叫苦連天，說客人不夠，爲甚麼呢？因爲我們去餐廳的時間很可能是其他人也是去餐廳的時間，我們很少看到高峰期以外的景況。我們用了柯西—施瓦茨不等式（Cauchy-schwarz inequality）來證明這點，並刊登於 College Mathematics Journal[2]，又將簡化版刊登於《邁向大眾數學之數學教育》[3]。

---

1 蕭文強、林建（1982）。《概率萬花筒》。香港：廣角鏡出版社。2007 年香港統計學會重印，2010 年修訂版香港教育局課程發展處數學教育組印。

2 Wong, N. Y. (1987). Why is a restaurant's business worse in the owner's eye than in the customers'. *College Mathematics Journal*. Later published in U. Dudley (Ed.) (2008), *Is mathematics inevitable? – A miscellany* (pp. 66-67). Washington, D.C.: The Mathematical Association of America.

3 黃毅英（1997）。把數學變成有趣和可供探索的一科。載黃毅英（編），《邁向大眾數學之數學教育》（頁 329-349）。臺北：九章出版社。

簡化版是，假設餐廳某天顧客情況是早市（齊齊整整的）200 名，午市 1000 名，晚市 300 名，那麼在老闆眼中，該天的顧客總數便是 1500 人。而在顧客眼中，卻是另一種光景：早市每位顧客會以爲全日有 600 人（200×3 —— 乘以 3 是推廣到 3 個時段），午市的顧客則以爲有 3000 人（1000×3），而晚市的顧客則會認爲是 900 人（300×3）。故此，我們若想像逐個顧客報上他們認爲的顧客人數，我們共得出 1500 個答案，總人數 3×(200×200 + 1000×1000 + 300×300)。所以，顧客眼中的餐廳平均人數爲 2260 人[1]（$\frac{[3\times(200\times200+1000\times1000+300\times300)]}{200+1000+300}$），高於老闆眼中的實際人數。這其實也就是柯西—施瓦茨不等式（$\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}\ge(a+b+c)$，其中 $a = 200$、$b = 1000$、$c = 300$）。而如果到餐廳的人流是均勻分佈（uniform distribution），亦即在每一個時段的人數均勻出現，老闆眼中的顧客狀況才會和顧客眼中的狀況一致。故此，老闆會用千方百計把「顧客曲綫」拉平，諸如 12 時結帳有折扣，下午 3–4 時有「歡樂時光」之類。

二、 購票問題

後來學長劉奇偉兄又提出兩個問題並解決了，結果刊登於《數學通報》（Mathematics Bulletin）[2]：

第一個問題是（當時仍沒電子貨幣），假若戲票 10 元 1 張，現時有 100 人排隊購票，50 人有 10 元零錢，另 50 人則有 20 元紙幣，假如售票員開檔售票時毫無分文，理論上，是完全可作找贖過來的，但排隊的狀況不一定有零錢的就排在前頭。問排隊的狀況不出現找贖困難的機會如何？ 這裏，我們不妨假設共有 $n + m$ 個人排隊，其中 n 個人有 10 元零錢，m 個人有 20 元紙幣，整個排隊狀況不會出現困難的概率記爲 $P_{n,m}$，顯然當 $n < m$，$P_{n,m} = 0$。事件 A 表示從第一個人到倒數第二個（即 $n - m + 1$）人都不會出現困難，事件 B 表示最後一個人手頭持有 10 元零錢。那麼 $P_{n,m}=P(A|B)P(B)+P(A|B')P(B')=P_{n-1,m}(\frac{n}{m+n})+P_{n,m-1}(\frac{m}{m+n})$。

---

[1] 當時「把數學變成有趣和可供探索的一科」一文中的人數其實算錯了。

[2] Han (1983). Two problems in probability. *Mathematics Bulletin, 7*, 37–38. 【Han（漢）是他的筆名，因漢朝宗室姓劉】

運用數學歸納法，可以得到 $P_{n,m}=\begin{cases}\dfrac{n-m+1}{n+1} & n\ge m\\ 0 & n<m\end{cases}$。回到上面的特殊情況，$n=50$，$m=50$ 時，排隊不出現找贖困難的概率是 $P_{50,50}=\dfrac{1}{51}$（約為 2%）。

三、 唱票問題

另一個類似的問題是選舉唱票。若只有兩位候選人 A 和 B。最終 A 勝，例如 A 得 50 票，B 得 30 票（一般情況是 n、m，$n>m$），但唱票中期可能反覆。例如先唱了 10 票 B 的，故中段是 B 勝，後期才唱 A 的票。問 A 一直領先到底的機會是多少？我們也可先考慮對於一般的情況，即 A 得 n 張票，B 得 m 張票。假設整個唱票過程中，A 一直領先 B（$n>m$）的概率記為 $Q_{n,m}$。由上面一題的分析，不難得出：$Q_{n,m}=Q_{n-1,m}(\dfrac{n}{m+n})+Q_{n,m-1}(\dfrac{m}{m+n})$。

利用歸納法，我們能得到：$Q_{n,m}=\begin{cases}\dfrac{n-m}{n+m} & n>m\\ \text{無意義} & n\le m\end{cases}$。回到題目中的數據，在唱票過程中，$A$ 一直處於領先的概率為 $Q_{50,30}=\dfrac{1}{4}$（或為 25%）。

——未完成之問題——

四、 下午茶吃果仁問題

當時雖然未有「卡拉 OK」（KaraOKE），但在酒吧亦往往附上一碟果仁。當時有報導說，英國的一項調查發現，酒吧裡的這些果仁含菌量很高，其中一個猜測是客人中途如廁後沒把手洗淨便再次撿取果仁。當時我們就想這些果仁吃剩了，侍應會否倒掉，還是只加滿了便算。於是就有這麼一個問題：一個酒吧提供每位客人一碟 n 粒的果仁，客人總是吃掉其中 r 粒（$r\le n$）。酒保只是添加 $n-r$ 粒就給下一位客人，問給第 p 手的客人的碟中還有第 p 手的果仁的概率為何？這裡，我們不妨假設第 p 位來訪的客人是黃先生，最初碟中的 n 粒果仁分別是 $a_1,a_2,\ldots a_n$，而事件 E_i 表示第 a_i 粒果

仁仍在黃先生的碟中。在黃先生到來之前，餐碟已經被侍應進行了 $p-1$ 次操作，於是對於所求的概率 $P(E_1 \cup E_1 \cup \cdots E_n)$，我們有

$$P(E_1 \cup E_1 \cup \cdots E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots P(E_n) - \left[P(E_1 \cap E_2) + P(E_2 \cap E_3) + \cdots P(E_{n-1} \cap E_n)\right] + \left[P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_4) + \cdots + P(E_{n-2} \cap E_{n-1} \cap E_n)\right] - \cdots + (-1)^{n+1} P(E_1 \cap E_1 \cap \cdots \cap E_n)$$

$$= \left[\left(\frac{C_r^{n-1}}{C_r^n}\right)^{p-1} + \left(\frac{C_r^{n-1}}{C_r^n}\right)^{p-1} + \cdots \left(\frac{C_r^{n-1}}{C_r^n}\right)^{p-1}\right] + -C_2^n \left[\left(\frac{C_r^{n-2}}{C_r^n}\right)^{p-1} + \left(\frac{C_r^{n-2}}{C_r^n}\right)^{p-1} + \cdots \left(\frac{C_r^{n-2}}{C_r^n}\right)^{p-1}\right] + \cdots$$

$$= \sum_{i=1}^{n-r} (-1)^{i+1} C_i^n \left(\frac{C_r^{n-i}}{C_r^n}\right)^{p-1}$$，其中 $C_r^{n-i} = \dfrac{(n-i)(n-i-1)\cdots(n-i-r)}{r!}$。

而當 $p \to \infty$ 時（即那碟果仁傳遞下去的次數愈來愈多時），不難驗證上述的概率是 $\to 0$ 的。詳見《數學通報》第 8 期（1984）問題徵答 4(b)（頁 44 – 45）（解答在第 9 期頁 45 – 46）。

五、 賽制問題

首筆者剛加入中文大學時，除了教數學教學法外，亦教課外活動。其中一課談到賽制。一般認爲循環制比淘汰制更爲公平，但是否有依據呢？於翻查了蕭文強和林建的《概率萬花筒》，其中確有一章談到賽制。不過，若果各隊實力有清楚排序，那末任何賽制下，冠軍就必然冠軍，只是實力第二的未必一定是亞軍，因爲它有可能因淘汰制的關係，一早被實力最佳的隊伍淘汰掉（見《概率萬花筒》頁 21 – 22）。

但除了實力之外，一般相信有所謂「相剋隊伍」（「格食格」）的情況。此外，還有「非必然性」的因素。由於天氣、場地等緣故，實力最強的不一定是長勝將軍。

筆者曾用一些具體情況，例如只考慮 A、B、C、D 四隊。假設了沒有必勝這回事，只有勝負概率。即如 A 遇到 B 時，A 勝的概率是 0.6 等（若有必然勝負問題就沒意思了），作了一些計算。如果沒算錯的話，雖然實力第二的一隊得冠軍在循環制的機會確比淘汰制高。但一般情況就十分複雜了。有興趣的讀者不妨試試。

首作者電郵：黃毅英 nywong@cuhk.edu.hk