

## $4\frac{3}{2}$ 是不是帶分數？

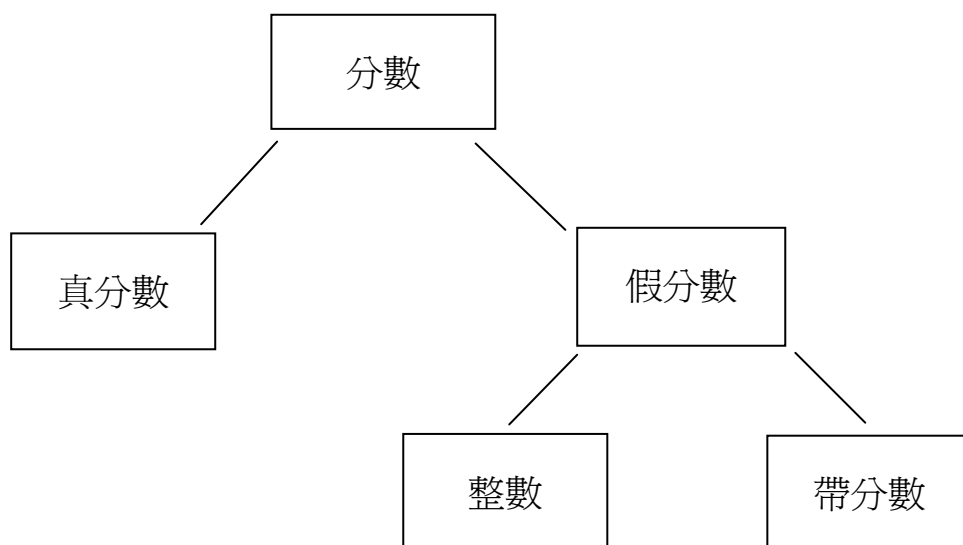
陳葉祥

香港中文大學課程與教學學系

$4\frac{3}{2}$  是不是帶分數？這是我的學位教師教育文憑學生問我的問題。這是關於定義的問題，要回答其實不難，找出帶分數的定義就可以解答了。教科書通常把帶分數定義為「整數帶真分數」，因此  $4\frac{3}{2}$  不是帶分數。使人（我的學生）不舒服的是  $4\frac{3}{2}$  到底是什麼分數？他指到底它是真分數、假分數，還是帶分數？關於這個問題，我將下文再談。（我邀請讀者先自行想一想。）類似的問題是  $\frac{3}{3}$  是什麼「分數」？若果把假分數定義為分子大於或等於分母的分數，那麼我便回答你，它是假分數！（不過，既然  $\frac{3}{3}=1$ ，說它是整數又如何？）

我不是已經解答完了嗎？若果單純滿足分數的分類，的確如此！（有些老師教「分數的分類」的確是這樣做！把真分數、假分數、帶分數的定義說出，然後舉些例子，着學生分類。）問題是：為什麼要分類？為什麼真分數叫真分數？假分數叫假分數？假在哪裡？帶分數的意義在哪裡？為什麼明明  $4\frac{3}{2}$  是一個整數帶一個分數，卻偏偏不把它叫帶分數？讓我們先想清楚為什麼要有分數這個概念？當物件不夠一個整體時，便有需要引入分數概念。例如：以  $\frac{1}{2}$  表示一半。分數的意思就是把一整體平均分成若干份，取其中的幾份。因此， $\frac{1}{2}$  就是把一整體平均分成兩份，取其中一份。若以此理解，就足以見到假分數假在哪裡。就以  $\frac{3}{2}$  為例，若以上面的方式理解，就是把一整體平均分成 2 份，取其中的 3 份！明明只有兩份，何以可能取到 3 份呢？（延伸的問題是，如何理解  $\frac{3}{2}$ ？當然，最自然的方式是

把  $\frac{3}{2}$  化成  $1\frac{1}{2}$ ，這也說明其實帶分數通常是較為自然的表述！若果不准我把  $\frac{3}{2}$  化成  $1\frac{1}{2}$ ，另一個可能的的方法是：以  $\frac{1}{2}$  為一個單位， $\frac{3}{2}$  就是 3 個單位，即 3 個  $\frac{1}{2}$ 。）至於為何  $\frac{3}{3}$  是個假分數？大概因為  $\frac{3}{3}$  的值已是一個整體，故為「假」。至於為什麼帶分數（通常）定義為「整數帶真分數」而不是「整數帶分數」（即不論分數為真、還是假）？大概是把分數化成「整數帶真分數」最為容易理解其分數所代表的數值。就以文章開首的  $4\frac{3}{2}$  為例，把它理解成 4（個）加上  $\frac{3}{2}$  容易理解，還是 5 個加上  $\frac{1}{2}$  容易理解呢？討論到這裡，大概我們已發現，其實所謂真分數、假分數、帶分數是分數的不同表達形式，而不是分數本身。（例如：假分數可以化成帶分數的表達方式。）因此，若問  $4\frac{3}{2}$  是哪一種分數？其實不是太重要的問題。總之它就是一個分數，它不是真分數、不是假分數，又不是帶分數（的形式）又如何？有什麼大不了呢？討論到這裡，大概我們要返回更為基本的問題：為什麼要分不同形式的分數呢？其實，這是純粹為了操作上的需要，即是為日後的課題鋪路。例如，當計算分數乘法時，把分數化成真分數或假分數（相對帶分數而言）是較為容易。另一方面，若計算分數加減，則大概帶分數較為方便了。若是這樣，似乎重點其實不應放在分數的分類。（就分數的運算而言，到底  $\frac{3}{3}$  是整數還是假分數，或是  $4\frac{3}{2}$  算不算帶分數其實並不重要！）



我的學生還問了以下的延伸問題。假設有一道題目：運算  $3\frac{4}{5} + \frac{2}{5}$ 。若學生這樣做，是否可以接受呢？ $3\frac{4}{5} + \frac{2}{5} = 3\frac{6}{5} = 4\frac{1}{5}$ 。他的意思是，可否寫  $3\frac{6}{5}$ ？若讀者同意筆者上文的見解，答案應該呼之欲出了！首先，學生的解答過程是完全正確：無論在概念、還是運算上都無任何錯誤之處！若說  $3\frac{6}{5}$  不是帶分數，那又如何呢？它不是分數嗎？（誰說分數必須是真分數、假分數、或帶分數其中一種？）況且，學生只是把  $3\frac{6}{5}$  視作計算過程的中間步驟，而不是最後的答案！若果硬是不准學生寫  $3\frac{6}{5}$ ，難道要求他寫： $3\frac{4}{5} + \frac{2}{5} = 4\frac{1}{5}$ ？那麼，豈非連學生怎樣得出答案也不知道？（老師又會否說學生「跳步」呢？）

討論到這裡，筆者不是說定義不重要、格式不重要。例如，有些公認的定義或符號，我們是必須跟從的。舉例：分數是一個能化成整數除以非零整數的數；分數的寫法是分子在上、分母在下。在現代的數學習慣的確是這樣，我們不應別樹一格。畢竟數學是一種社會活動，若別樹一格，便不能與別人溝通了！然而，筆者要指出不是所有定義、格式都是屬於這一種「公認」定義或格式（就如本文所舉的例子）；那麼老師是否應該過份拘泥，反而忽略更深層的數學意義呢？

### 後記（及鳴謝）

文章部分內容是我與中文大學的同事（尤其黃毅英教授）的討論成果，特此鳴謝。當然，文章內容若有偏差及錯誤，筆者理應負全責。

正如文章開首提及，這篇文章的意念源於我的學生的問題。筆者謹以這篇文章獻給我的所有學生。多謝你們！你們的問題引發我更深刻的思考，亦讓我知道老師們真正關心的問題。為到我這班願意多思考的學生（準老師），我感到自豪。有了你們這班樂於思考、願意對教學內容認真的準老師，我們的下一代有希望了！

作者電郵：mathchan@cuhk.edu.hk