

## 香港中學文憑考試數學科分數計算的研究

梁子傑  
循道中學

2012年，香港舉行了第一屆的中學文憑考試。同年，香港考試及評核局提供了一項新服務，就是在成績公布之後，考生可以購回自己在考試當日所完成的答題卷之副本。今年（即2013年），考生除了可以購回那副本之外，考評局亦同時附上一份《評卷紀錄報告》，詳細列明考生每一題的得分，與及整份試卷的總成績。本來，如此鉅細無遺地公布成績是一件好事，可是在報告上卻出現一大堆術語，諸如：「基本得分」、「調整得分」、「卷別得分」、「加權卷別得分」、「科目得分」等，雖然報告亦有對上述術語作了簡單的解釋（考評局在網上亦有較詳細的解釋<sup>1</sup>），但畢竟只是三言兩語的描述，亦沒有提供具體的計算公式，閱後反而使人更加迷惘。

一個令人感到十分滑稽的場面出現在2013年10月29日香港中學文憑考試數學科成績簡報會之上。一位與會的教師向台上講者追問考試成績計算辦法的時候，台上的數學科科目經理回答說：「那些分數是經過一個十分複雜的計算過程而獲得的，如果聽眾並非『數學人』，是難以明白的，故此不打算在會上向全體聽眾解釋；不過對此問題感興趣的教師，可以在會後到台前慢慢討論。」結果，在會議結束後，大約有10多位教師走到台前聆聽那經理的講解。但在10多分鐘的講解中，那經理只是重複引用了一些計算正變和部分變的代數式來解釋，卻未能具體交代有關算式中所採用的係數數值，令人失望而回。

筆者只是一名普通的中學數學教師，除了10多年前參與過一次公開試試卷評核工作之外，從沒有接觸過考評局的任何內部運作，更不認識公開試分數計算的方法。但由於覺得這個問題涉及數字，十分有趣，故此也曾花了一些時間來作點研究，嘗試找出每一個得分之間的關係。以下是筆者對文憑試數學科分數計算方法的研究結果、一些猜想和建議，寫出來與大家分享，還望有識之士能逐一指正。

---

<sup>1</sup> 見 [http://www.hkeaa.edu.hk/tc/HKDSE/assessment/marking/processing\\_of\\_marks/](http://www.hkeaa.edu.hk/tc/HKDSE/assessment/marking/processing_of_marks/)

爲了清楚明瞭有關分數的計算方法，筆者一共收集了 12 名應屆考生（當中包括筆者的學生與及筆者幾位朋友的學生）的考試成績。詳見表一。

	1A1	1A2	A	B	卷一基本得分	卷一加權得分	卷二基本得分	卷二加權得分	科目得分
滿分	35	35		35			45		201
學生 1	30	32	62	29	91	108	43	73	181
學生 2	31	34	65	23	88	104	44	75	179
學生 3	32	32	64	25	89	106	41	70	176
學生 4	27	33	60	24	84	100	41	70	170
學生 5	26	34	60	22	82	97	41	70	167
學生 6	30	29	59	19	78	93	41	70	163
學生 7	28	28	56	26	82	97	38	65	162
學生 8	28	31	59	19	78	93	39	66	159
學生 9	29	14	43	19	62	74	29	49	123
學生 10	28	15	43	5	48	57	28	48	105
學生 11	22	15	37	1	38	45	18	31	76
學生 12	19	9	28	3	31	37	12	20	57

表一：在評卷紀錄報告上所顯示的分數

根據考評局在網上提供的《評核大綱》<sup>1</sup>，2013 年數學科文憑試（必修部分）共分爲兩份試卷。卷一爲傳統題，分甲部 (1)、甲部 (2) 及乙部三個部分，每部分的滿分爲 35 分，全卷滿分爲 105，佔總成績的 65%。卷二爲多項選擇題，佔總成績的 35%。雖然《大綱》中沒有明確地說明卷二中有多少條選擇題，但是在從公布出來的試卷可知，卷二共有 45 條選擇題，每題所得的分數相等，故卷二的滿分爲 45 分。

表一中，“1A1”表示考生在甲部 (1) 的得分，“1A2”表示考生在甲部 (2) 的得分，“A”表示考生在甲部的得分，“B”表示考生在乙部的得分，不難驗證，甲部 (1) 和甲部 (2) 得分之和爲甲部的得分，而甲、乙二部之和就是卷一的「基本得分」。卷二的「基本得分」應該等於考生在選擇題中答對的題數。另外，卷一和卷二的「加權得分」之和等於「科目得分」，那就是考生數學科的總成績。考評局亦是按這個分數來決定考生所得的最終等級。不過，問題是：卷一及卷二的基本得分和加權得分有甚麼關係呢？按照評卷紀錄報告所表示，數學科科目得分的滿分爲 201 分，並非傳統上經常所採用的 100 或 200 分等分數。那麼，爲甚麼考評局要選擇這個分數呢？採用 201 分爲滿分有甚麼根據呢？

<sup>1</sup> 見 [http://www.hkeaa.edu.hk/tc/hkdse/assessment/assessment\\_framework/](http://www.hkeaa.edu.hk/tc/hkdse/assessment/assessment_framework/)

據筆者推測，考評局不採用 100 分爲滿分的理由十分明顯。首先，所有考生的分數都以整數來表達。如果以 100 分爲滿分來計算考生的科目得分，那麼由於卷一佔總成績的 65%，即 65 分，而卷一原本的滿分爲 105 分，因此根據「鴿巢原理」，便會有部分的考生，即使他們在卷一中得到不同的分數，但經過轉換之後，他們的科目得分將會變成相等。例如：85 分和 86 分，按比例轉換和四捨五入後，它們都是 53 分。在現在那麼「高風險」的公開考試中，我們應該力求把分數接近的考生分開，而不是將他們等同，否則很難將能力較好和較弱的考生區分出來。類似地，卷二亦由 45 分轉換成 35 分，也不是一個理想的情況。故此，將科目得分擴展成大於 100 的分數，做法合理。當然，爲甚麼是 201 分，那就要進一步探討了。

在探討的過程中，筆者發現一個矛盾現象。按《評核大綱》所說，卷一佔總成績的 65%，卷二佔 35%。若總成績的滿分爲 201 分，那麼卷一的滿分應該是 130.65 分，卷二爲 70.35。不過，從表一可知，學生 1 和學生 2 的卷二加權得分爲 73 和 75 分，高於上述的推算。那麼卷一和卷二在科目得分中，實際上佔有多少的百分比呢？爲了瞭解有關的轉換比例，筆者做了一點的計算，得到表二。

	卷一基本得分	卷一加權得分	$\frac{\text{卷一加權得分}}{\text{卷一基本得分}}$	卷二基本得分	卷二加權得分	$\frac{\text{卷二加權得分}}{\text{卷二基本得分}}$
學生 1	91	108	1.186813187	43	73	1.697674419
學生 2	88	104	1.181818182	44	75	1.704545455
學生 3	89	106	1.191011236	41	70	1.707317073
學生 4	84	100	1.19047619	41	70	1.707317073
學生 5	82	97	1.182926829	41	70	1.707317073
學生 6	78	93	1.192307692	41	70	1.707317073
學生 7	82	97	1.182926829	38	65	1.710526316
學生 8	78	93	1.192307692	39	66	1.692307692
學生 9	62	74	1.193548387	29	49	1.689655172
學生 10	48	57	1.1875	28	48	1.714285714
學生 11	38	45	1.184210526	18	31	1.722222222
學生 12	31	37	1.193548387	12	20	1.666666667

表二：分析「加權得分」與「基本得分」的比例

從表二可見，加權得分與基本得分的比例並非一致。原因非常明顯，那是由於在計算加權得分時，曾經進行過四捨五入。在 12 個比例之中，卷一加權得分與基本得分之比，最小的是 1.181818182，最大的是 1.193548387。將 105 乘以上述兩個係數可推算出，卷一加權得分的滿分應

介乎於 124.0909091 與 125.3225806 之間。若滿分是整數，那麼滿分應是 125 分了。不過，筆者發現事實並非如此。如果以滿分 125 分作為基礎計算表一中 12 名學生的成績，那麼有 8 名學生的科目得分並不等於考評局計算出來的結果。再三研究，最後發現原來卷一加權得分的滿分是 124.6 分，而卷二加權得分的滿分是 76.4 分。卷一和卷二的滿分原來並不是整數！

在此，筆者感到非常疑惑。既然考評局在計算過程中，對每一個得分都會以四捨五入轉換成整數，那麼為甚麼兩份試卷加權得分的滿分卻偏偏是小數呢？再者，201 分是如何確定的呢？最後，亦是最重要的問題：《評核大綱》中明確地指出，當計算總成績時，卷一和卷二會按 65 : 35 的比重來計算，但現在卻是  $124.6 : 76.4 = 623 : 382$ ，這樣算不算是違反了《評核大綱》中的承諾呢？其用意何在？

翻查考評局的網頁，當中有一個段落談及文憑試分數處理的方法<sup>1</sup>，並解釋說：「由於整體考生於同一科目各卷別的表现未必相同，各卷的平均得分及分數分布範圍亦有差異，因此各卷的得分不能直接比較。」同時亦引用一個例子說明，如果卷一和卷二的標準差有分別，那麼按公布的比重直接將兩卷分數相加，會令某些考生得益，造成不公。由此筆者猜想，考評局就是基於上述的理由，放棄了使用 65 : 35 的比重，而改用 623 : 382。

不過，筆者認為，依賴標準差來調節分數是否較為公平，純屬見仁見智，方法亦沒有統一的標準，不夠客觀。更何況我們目前所面對的，並不是一個只得兩個考生考獲極端分數的情況，而是有數以萬計的考生爭取成績考入大學的情境。從考生的角度看，他們從某卷考取的分數，就是那個分數，根本不會考慮甚麼的「標準差」。現在硬說由於標準差太高或太低，因而要將他們所得的分數比重加減，試問他們的感受又如何？

表一中，學生 6 在卷一的基本得分是 78，卷二是 41。學生 7 在卷一的基本得分是 82，卷二是 38。若按照考評局 201 分滿分的科目得分計算，學生 6 最後得到 163 分，學生 7 得到 162 分。學生 6 比學生 7 高出 1 分。但若按照當初 65 : 35 的比重以 100 分為滿分計算，則學生 6 得到 80.17460317 分，學生 7 得到 80.31746032 分，學生 7 反而較學生 6 多出了 0.142857143 分！在這情況下，試問學生 7 會否同意考評局採用的加權分數？假如到最

<sup>1</sup> 亦見 [http://www.hkeaa.edu.hk/tc/HKDSE/assessment/marking/processing\\_of\\_marks/](http://www.hkeaa.edu.hk/tc/HKDSE/assessment/marking/processing_of_marks/)

後評定等級時，其中一個等級分界線剛好是 163 分，那麼縱使學生 7 在 65 : 35 的情況下得到些微較佳的分數，最後卻低於學生 6 一個等級，試問學生 7 會認為公平嗎？

在現今資訊爆炸的年代，筆者不明白考評局為甚麼依然採用 20 多年前的計分方式來計算考生的得分。更不明白為甚麼仍然堅持使用整數。回想當年計算工具並不發達的時代，先將分卷分數四捨五入，然後求和，是一個普遍的習慣。但隨著計算工具的普及，我們已經可以將分數計算至小數點後多個位，亦毋須擔心記憶體不足的問題。要知道，由「先捨入、後求和」所得的分數，與「先求和、後捨入」所得的結果並不相同（例如：甲在卷一和卷二分別考獲 95 和 28 分，乙考獲 93 和 29 分。在「先捨入」的情況下，甲的科目得分為 161，乙得 159。但在「先求和」的情況下，二人同得 160 分）。筆者相信，「先捨入」的計算方式多少帶有點幸運的成份，「先求和」則沒有（正如前例中的甲，兩卷的得分都剛好可以令他提升 1 分；而乙本來可以令他提升 1 分的機會，卻因為「先捨入」而被扣去！）。因此，在考評局不斷地強調公平性的論調下，筆者真的不明白為甚麼當局仍然會採用「先捨入」的做法！

如果考評局對整數有一定的偏好，那麼筆者希望借以下幾行，介紹的一計分的方法，盡量去除兩次四捨五入所帶來的不公平性和幸運性。

設某考生卷一和卷二的基本得分分別為  $x$  和  $y$ 。那麼按照 100 分為滿分、65 : 35 的比重計算，他的科目得分為  $f(x, y) = \frac{x}{105} \times 65 + \frac{y}{45} \times 35 = \frac{13x}{21} + \frac{7y}{9}$ 。由這個函數求得的結果不是整數，但將  $f(x, y)$  全式乘以 21 和 9 的最小公倍數，即 63，則得到  $F(x, y) = 39x + 49y$ ，由這個函數所計算出來的每一個分數都必定是整數了！而且整個計算都不涉及四捨五入，肯定是絕對公平的了。當然，這個函數  $F$  有一個小問題，就是滿分非常之大，是 6300 分。對此，一個解決辦法是將  $F$  除以 7，將滿分定為 900。這樣當計算科目得分時，只須對卷一的分數進行四捨五入，從而減少兩次四捨五入時所帶來的幸運成份。又如果我們不介意科目得分的滿分為一個小數，那麼將  $F$  除以 39 或 49，也有同樣的計算效果。