

教室剪影：直線方程的教學設計

戚文鋒

中華基督教會譚李麗芬紀念中學

前言

在香港的高中數學課程中，「直線方程」被編入「直線與圓的方程」的學習單位內，課程列明學生須理解直線方程並且能夠在不同的條件下求出方程，例如：已知兩點坐標、已知斜率及一點坐標、已知斜率及 y 截距等。

大部分課本先教授「點斜式」，然後是「兩點式」和「斜截式」。根據筆者觀察，一般學生會出現以下的學習困難：

1. 先備知識不足：有些課本引進「點斜式」時，或明或暗用上「軌跡」的概念（通過一動點與一定點的直線的斜率保持不變），學生是不容易明白。
2. 混淆以上三道公式：三道公式十分相似，學生分不清楚何時使用何道公式，對三者的關係亦十分模糊。
3. 未能理解直線方程的意義：學生的注意力已放在三道公式的機械運算之上，並不在乎方程裡的 x 和 y 能代表直線上任意點的坐標，由此不能進一步應用求得的直線方程來解決相關問題。

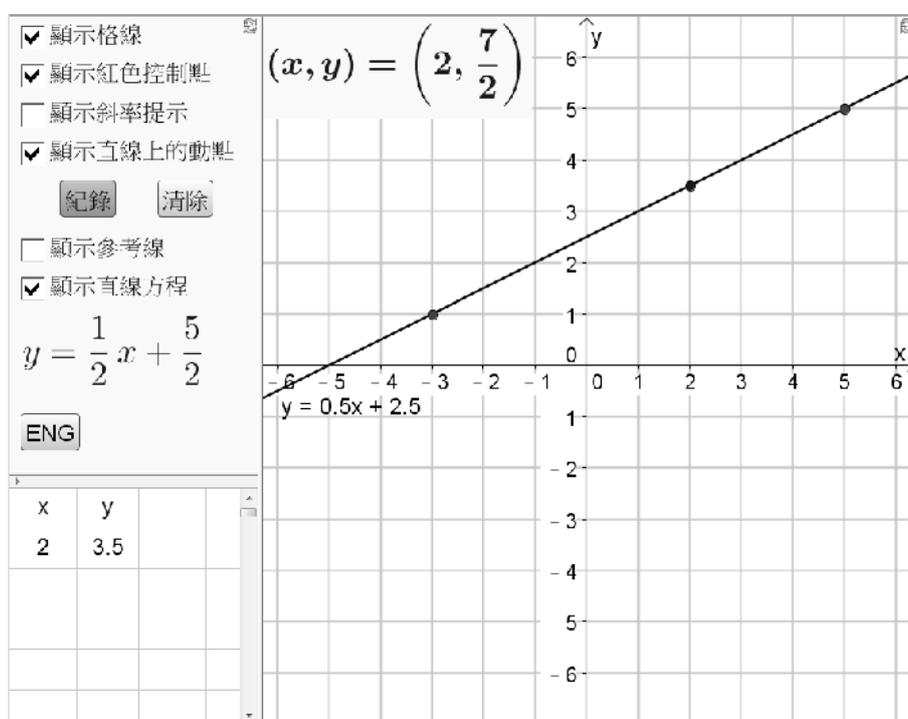
另外，課本的處理方式亦可能誘使教師流水帳式教授「點斜式」、「兩點式」、「斜截式」（可能還有「截距式」和「一般式」！），而直線方程作為線性關係的中心思想卻被輕輕帶過。

GeoGebra課件

針對以上的學習困難和教學流弊，筆者利用免費軟件 GeoGebra（www.geogebra.org）設計了一個互動課件，並嘗試只用「斜截式」來組織教學，希望化繁為簡之餘，亦令在初中階段對「二元一次方程」、「斜率」等課題掌握不好的同學亦可踏上學習直線方程之路。

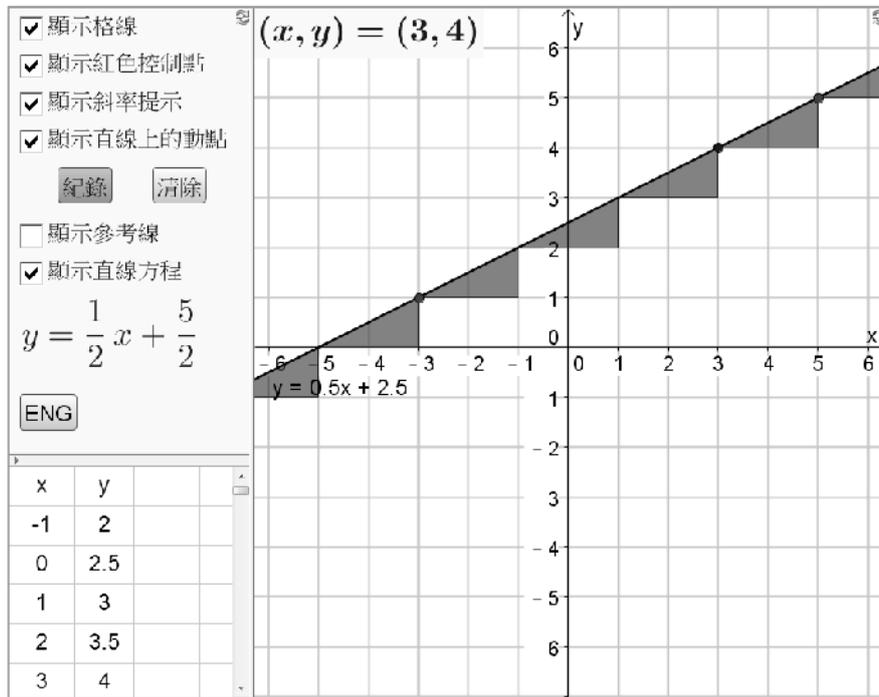
筆者設計的課件 (www.geogebra.org/material/show/id/27527) 包括以下主要功能：

- 教師可拖拉兩個紅色控制點，以調整直線在直角坐標平面中的位置，並按需要隱藏或顯示它們（見圖一）。
- 教師可隱藏或顯示直線方程（斜截式，其係數和常數項以分數形式表示）（見圖1）。
- 教師可隱藏或顯示直線上的一個藍色動點，並可顯示及以表列形式紀錄其坐標（見圖2）。
- 當兩個紅色控制點均為格點（整數點）時，教師可用「斜率提示」顯示一連串依附在直線上的直角三角形，以便來直觀地表示直線的斜率（見圖2）。
- 「參考線」是一條平行於原有直線且通過原點的直線（見圖3）。若同時顯示「參考線」及藍色動點，畫面會顯示藍色動點在「參考線」上的鉛垂投影及一箭咀，示意將「參考線」向上 / 向下平移就可得到原有直線。
- 拖拉直線可平移它（並同時平移紅色控制點）。



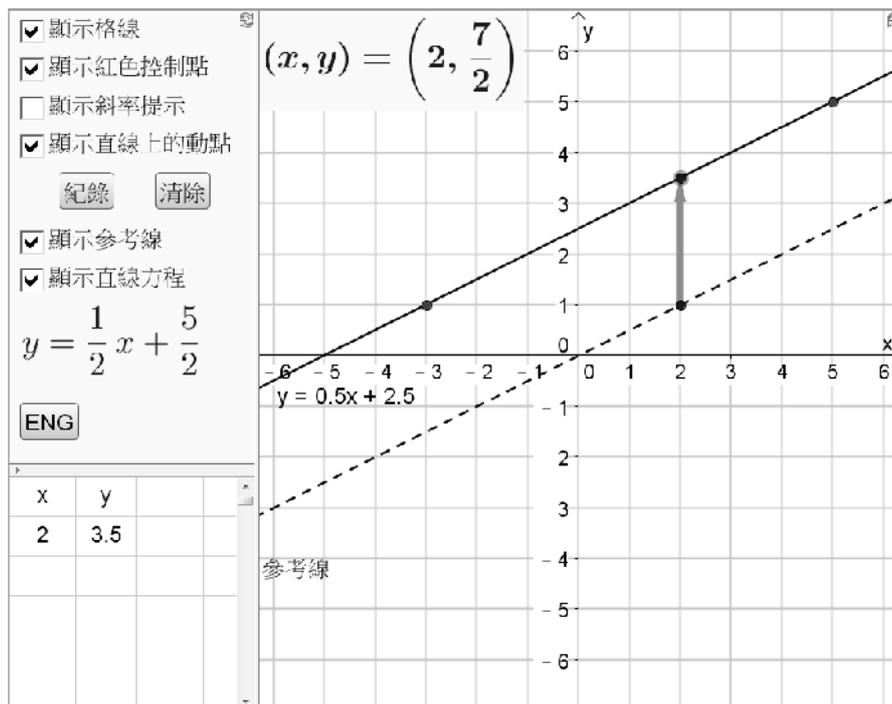
Click the straight line to show/ hide the red controls. Click the blue coordinates to change it to fractions or decimals.
點擊直線可顯示或隱藏紅色控制點；點擊藍色動點坐標可將其轉換為分數或小数。

圖 1



Click the straight line to show/hide the red controls. Click the blue coordinates to change it to fractions or decimals.
 點擊直線可顯示或隱藏紅色控制點，點擊藍色動點坐標可把它轉換為分數或小数。

圖 2



Click the straight line to show/hide the red controls. Click the blue coordinates to change it to fractions or decimals.
 點擊直線可顯示或隱藏紅色控制點，點擊藍色動點坐標可把它轉換為分數或小数。

圖 3

教學設計

第一部分（通過原點的直線）

1. 教師可先將兩個紅色控制點移到(0, 0)及(4, 4)，隱藏它們後就拖拉藍色動點，著學生觀察其 x 坐標和 y 坐標的變化，學生不難看出「 x 坐標永遠等於 y 坐標」這關係（或規限），教師可引導學生以 $x = y$ （或 $y = x$ ）這更簡潔的方式來表示 x 坐標和 y 坐標的關係。按「顯示直線方程」來「核實」答案。
2. 教師可將控制點(4, 4)移到(6, 6)，引導學生猜想直線的方程。如有需要，可紀錄動點在不同位置的坐標。最後按「顯示直線方程」來「核實」答案。
3. 繼續探究 $y=3x$ 、 $y=4x$ 、 $y=\frac{1}{2}x$ 、 $y=\frac{3}{2}x$ 等方程，每次均著學生猜想直線的方程。如學生有困難，就重新觀察藍色動點的坐標，同時著學生在方格紙上畫出各直線的略圖，方便學生觀察不同的 x 係數對直線圖像的影響。
4. 學生足夠熟練後就可探討負係數的情況。
5. 顯示「斜率提示」，並以不同例子說明 x 係數代表直線傾斜的程度，即是直線「上升」或「下降」的「速度」。將動點的 x 逐次增加1並紀錄 y 值，可幫助學生理解 x 係數是 x 值每增加1時， y 相應增加或減少的值。教師可在此處連結初中階段已學習的斜率公式。最後總結方程 $y = mx$ 表示一條通過原點的直線，其斜率為 m 。

第二部分（引入「斜截式」）

1. 顯示直線 $y = x$ 。將它上、下平移數個單位，觀察並紀錄動點在不同位置的坐標，引導學生猜想出直線的方程。然後顯示「參考線」，比較動點及其鉛垂投影的坐標（同一 x 坐標， y 坐標增加或減少了）。同時著學生在方格紙上畫出各直線的略圖，方便學生觀察不同的平移幅度對直線方程的影響。

2. 以不同例子（例如 $y=2x+c$ 、 $y=-2x+c$ ）說明將直線 $y=mx$ 上、下平移所得的直線可用方程 $y=mx+c$ 表示。
3. 將藍色動點移動到 y 截距，可看出參考線上的原點垂直平移 c 單位後位於 $(0, c)$ ，故 c （平移幅度）亦即是 y 截距，最後總結方程 $y=mx+c$ 表示一條通過 $(0, c)$ 的直線，其斜率為 m （如圖4）。方程 $y=mx+c$ 就稱為直線的「斜截式」。

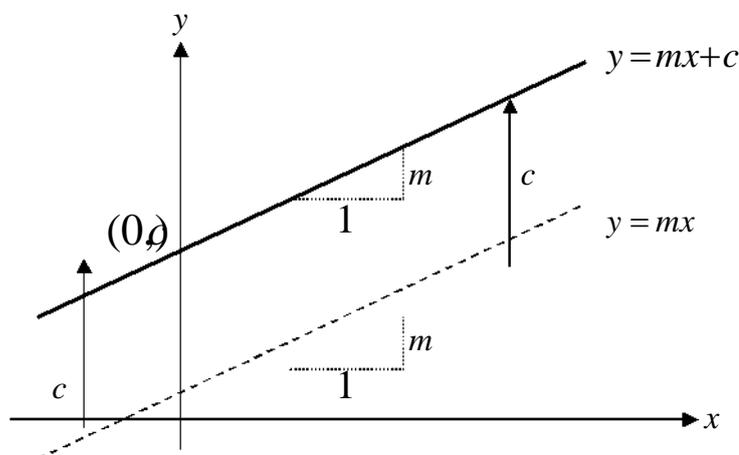


圖 4

第三部分（在不同的條件下求出方程）

教師可只用「斜截式」求直線方程：

- 已知斜率及 y 截距：直接代入「斜截式」；
- 已知斜率及一點坐標：用「待定係數方法」求出 c 的值；
- 已知兩點坐標：先求出斜率 m ，然後用「待定係數方法」求出 c 的值，或解聯立方程同時求出 m 和 c 的值。

其他公式諸如「點斜式」、「兩點式」可暫且擱下。

結語

據筆者所知，不少香港課本將直線方程放在中五冊，而另一課題「二次函數」則放在中四冊，以致出現學習二次函數先於直線方程（一次函數）的奇怪現象。出版社為何如何編排呢？是否直線方程與圓方程在課程文件中屬同一學習單位，緊接在軌跡學習單位之後，而軌跡和圓方程一般在中

五級才教授，以致出版社不願把它們分開？還是在中四同時教授直線方程與二次函數而怕學生吃不消？上文的教學設計只針對一道公式，相信可節省一定課時。故筆者大膽建議編排直線方程在中四級上學期先於二次函數教授、使學生學習二次函數時有更堅實的基礎，修讀延伸單元或其他選修科如物理科的學生亦可受益。一些較複雜的支節（如水平線、鉛垂線的方程）則可留待學習「二次函數」或「圓方程」時才處理。

作者電郵：mfchik@ gmail.com