談談綜合除法

王華峰
風采中學(教育評議會主辦)

前言

當兩個多項式相除，欲求商式和餘式時，長除法是中學課程中的必然之選。此外，有些課本的補充或增潤部分[1]，介紹了另類的做法 —— 綜合除法 (Synthetic division)。

長除法本是連續減法過程（即除法本質）的直接體現，然其過程未免冗長，而當中連續的減法亦是學生計算出錯的溫床。綜合除法恰恰在這兩個方面填補了長除法的不足。本文期望將綜合除法的操作過程作系統的整理和進一步深入的探討，借《數學教育》這一平台與關心數學教育的朋友分享之。

從長除法到綜合除法

例 1： $(x^3+5x^2+7x-11)\div(x+2)$

長除法 商式

$$\begin{array}{r l}
 & x^2+3x+1 \\
x+2 & \overline{)\,x^3+5x^2+7x-11} \\
 & \underline{x^3+2x^2} \\
 & 3x^2+7x \\
 & \underline{3x^2+6x} \\
 & x-11 \\
 & \underline{x+2} \\
 & \boxed{-13}
\end{array}$$

餘式

分離係數之長除法 商式

$$\begin{array}{r l}
 & 1+3+1 \\
1\ \boxed{+2} & \overline{)\,1+5+7-11} \\
 & \underline{-)\ 1+2} \\
 & 3+7 \\
 & \underline{-)\ 3+6} \\
 & 1-11 \\
 & \underline{-)\ 1+2} \\
 & \boxed{-13}
\end{array}$$

餘式

---

[1] P.234，《新世代數學》4A，必修部分，牛津大學出版社，梁貫成、王志新、孔富賢、尹鋈鴻著。

綜合除法

$$
\begin{array}{rrrr|r}
1 & 5 & 7 & -11 & \boxed{-2} \\
+) & -2 & -6 & -2 & \\
\hline
1 & 3 & 1 & \boxed{-13} &
\end{array}
$$

商式　　餘式

> **注意，在綜合除法中，加法取代了減法。**

例 1 列舉了利用長除法和綜合除法求形如 $f(x) \div (x-a)$ 的商式和餘式的過程，其中 $f(x)$ 是一多項式及 a 為非零常數。為方便比較，我們著眼於分離係數之長除法（歸根究底，它還是長除法，不過是脫離了自變量 x 的干擾，易於比較而已）。

綜合除法有別於長除法的關鍵在於對除式 $x-a$ 的處理。如上式中★所指，綜合除法將 $-a$ 變成 a，使得長除法中的連續相減到了綜合除法中，就變成連續相加了。

綜合除法的口訣與操作方式

綜合除法的口訣: 先補零，直相加，斜相乘。

例 2： $(2x^3-5x^2+11)\div(x-3)$

1) **先補零：這裡包括兩重意思，其一是將被除式中係數為零的項補足；其二是在綜合除式中第二行的首位補零。**

$$
\begin{array}{rrrr|r}
2 & -5 & 0 & 11 & 3 \\
0 & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

2) **直相加：第一列首兩個數相加，得到第三個數，即：** $2+0=2$。

$$
\begin{array}{rrrr|r}
2 & -5 & 0 & 11 & 3 \\
0 & & & & \\
\hline
2 & & & &
\end{array}
$$

3) **斜相乘：第二個步驟得到的結果與除式 $x-a$ 中的 a 相乘，得出第二行第二個　　　　　數，即：** $2\times3=6$。

$$
\begin{array}{rrrr|r}
2 & -5 & 0 & 11 & 3 \\
0 & 6 & & & \\
\hline
2 & & & &
\end{array}
$$

4) 重複(2)至(3)的步驟，直到最後一列得出“直相加”的結果。

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -5 & 0 & 11 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & 9 & \\ \hline 2 & 1 & 3 & \boxed{20} & \end{array}$$

商式　餘式

商式 $=2x^2+x+3$
餘式 $=20$

從以上的口訣和具體的操作方式觀之，綜合除法確實比長除法來得簡便，問題是這一簡便的做法是僅僅局限於除式為 $x-a$ 的情況，還是具有普遍的意義呢？

綜合除法的進一步探討

1. 考慮 $f(x)\div(ax-b)$，其中 $a\neq 0,1$ 及 $b\neq 0$。

 若商式為 $Q(x)$ 及餘式為 $R(x)$，則有

$$\begin{aligned} f(x) &= (ax-b)\cdot Q(x)+R(x) \\ &= a\left(x-\frac{b}{a}\right)\cdot Q(x)+R(x) \\ &= \left(x-\frac{b}{a}\right)\cdot aQ(x)+R(x) \end{aligned}$$

 可見，在使用綜合除法計算 $f(x)\div(ax-b)$ 時，可化為 $f(x)\div\left(x-\dfrac{b}{a}\right)$ 來考量，最後的結果，餘式不變，商式則除以a，事實上，$aQ(x)\div a=Q(x)$。

 例 3： $(8x^3-4x^2-6x+10)\div(2x-1)$

$$\begin{array}{cccc|c} 8 & -4 & -6 & 10 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 & 0 & -3 & \\ \hline 8 & 0 & -6 & \boxed{7} & \end{array}$$

 餘式

註： $(2x-1)=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

商式 $=\dfrac{1}{2}(8x^2+0\cdot x-6)$
$=4x^2-3$

餘式 $=7$

2. 考慮 $f(x)\div(a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0)$，其中 $m\leq\deg f(x)$。
 對於除式的次數大於或等於2的情形，綜合除法仍然適用。操作上，“先補零，直相加”並沒有甚麼不同，唯獨是在“斜相乘”時，每一行會產生

$m-1$**個數據。此外，若** $f(x)$ **的次數為** $n\ (\geq m)$ **，則要重複** $n-m+1$ **次"斜相乘"，故演算時要預留足夠的空間。**

例 4: $(2x^3-4x+1)\div(x^2-2x+3)$

$$\begin{array}{cccc|cc} 2 & 0 & -4 & 1 & 2 & -3 \\ & 4 & -6 & & & \\ & & & & & \\ \hline 2 & & & & & \end{array} \quad\rightarrow\quad \begin{array}{cccc|cc} 2 & 0 & -4 & 1 & 2 & -3 \\ & 4 & -6 & & & \\ & & 8 & -12 & & \\ \hline 2 & 4 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|cc} 2 & 0 & -4 & 1 & 2 & -3 \\ & 4 & -6 & & & \\ & & 8 & -12 & & \\ \hline 2 & 4 & -2 & -11 & & \end{array}$$

商式　　餘式

商式 $=2x+4$
餘式 $=-2x-11$

例 5: $(4x^6+2x^5-6x^4+5x^3+7x^2-x+1)\div(x^3+x^2-3x-1)$

$$\begin{array}{ccccccc|ccc} 4 & 2 & -6 & 5 & 7 & -1 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ & -4 & 12 & 4 & & & & & & \\ & & 2 & -6 & -2 & & & & & \\ & & & -8 & 24 & 8 & & & & \\ & & & & 5 & -15 & -5 & & & \\ \hline 4 & -2 & 8 & -5 & 34 & -8 & -4 & & & \end{array}$$

商式　　餘式

商式 $=4x^3-2x^2+8x-5$
餘式 $=34x^2-8x-4$

例 6: $(6x^3-4x^2+3x-8)\div(2x^2-4x+1)$

$$
\begin{array}{cccc|cc}
6 & -4 & 3 & -8 & 2 & -\frac{1}{2} \\
 & 12 & -3 & & & \\
 & & 16 & -4 & & \\
\hline
6 & 8 & 16 & -12 & &
\end{array}
$$

餘式

註： $(2x^2-4x+1)=2\left(x^2-2x+\frac{1}{2}\right)$

商式 $=\frac{1}{2}(6x+8)$

$=3x+4$

餘式 $=16x-12$

結語

綜合除法在演算過程中，僅僅牽涉到簡單的加法與乘法，在表達方式上亦見簡潔。同時，簡單易記的口訣對於鞏固學生對該算法的具體操作和記憶均大有裨益。總括而言，在進行多項式除法時，綜合除法無疑是長除法以外另一絕妙的選擇。

作者電郵： wahfungwong@yahoo.com.hk