Mit Zahlen spielen

楊思敏
英華小學

Arithmetik als Prozess (2004) 是一本以數學教學為本的書籍，作者深信成功的數學教學源自有系統、有意識地為學生提供適切的學習經驗，書中主要討論一些具啟發性的數學議題。對於我們一班數學老師來說，這本書俱有一定的參考價值，因此筆者想在此分享書中部分的內容。

Mit Zahlen spielen 是 Arithmetik als Prozess (2004)的第一章節的主題，意思大概是「play with the numbers」。提到數字、運算，快而準是大眾的一致目標，學生被灌輸「逢十進一」、「退一得十」等口號式的「心法」不勝其多，進而就是將這些「心法」反覆練習，成為應付考試的? 世武功。為要讓學生提起興趣學習，走過沉悶的反覆練習，老師不得不扭盡六壬，想出各種名目的速算遊戲，讓學生在不知不覺間多做了一些計算練習，而速度亦有所提升，成為一個出色的執行者。無疑這類遊戲對學生的學習興趣起了極正面的影響，亦能在技巧層面上提升學生的能力，但要真正做到把數字「玩」出個味兒來，對十進制體制概念有更深切的理解，成為知其所以然的專家，這類練習式的遊戲又似乎未能完全對焦。

作為一個最理想的「數字遊戲」，應該蘊含豐富的數學概念，並有一定的探究空間。讓學生不單單操練計算，與計算機比快比準，而是再進深探討了解整個數系統的運作。這是培養執行者與專家的最重要的分野。要跳出訓練式的運算遊戲，可以參考以下的例子：

Der ANNA-Zahlen

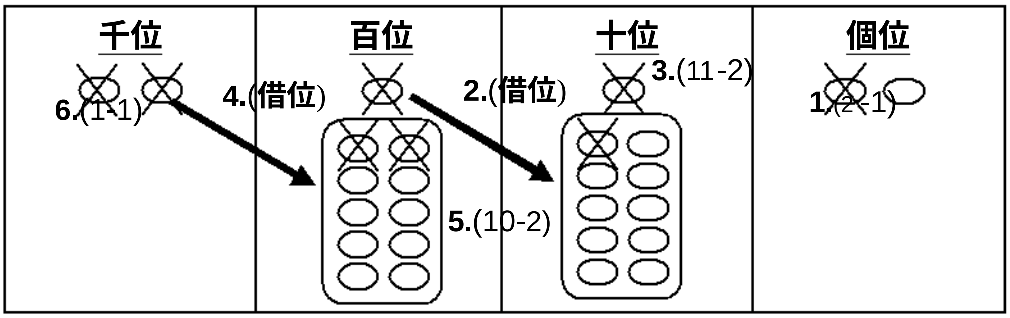
著學生隨意寫出兩個連續的一位數 (例：3和 4)，然後依規律排成兩個四位數字(即：4334 和 3443)，並計算它們的差。接著，讓學生再挑其他連續的一位數，多做幾次類似的四位減法計算，並紀錄結果。學生就會很快發現這些看似隨意的一些數字組合，竟然帶來同樣的差(891)。

9889－8998 = 891
8778－7887 = 891
.
.
.
2112－1221 = 891
1001 – 110 = 891

同樣是誘發學生多練習退位減法，但有別於速算類遊戲所帶給學生的刺激感，這遊戲帶給學生像魔術般的神秘感，令學生好奇背後的原理，並對這個現象進行猜想，而後續的破解過程便是精粹所在，使學生對整個十進位值記數系統有更立體的體驗。

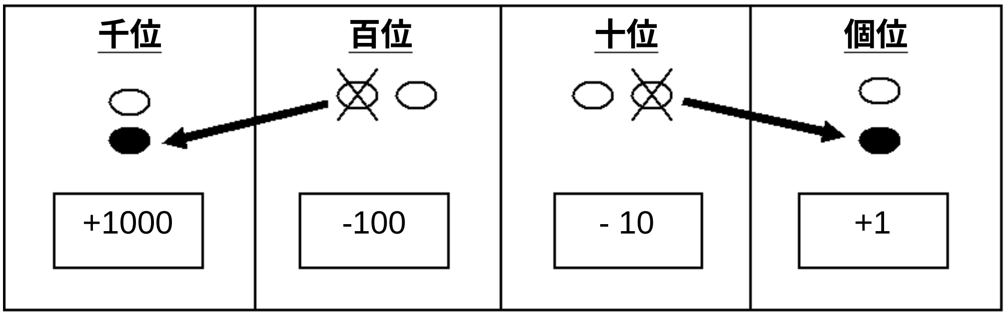
我們應該怎樣解釋這個現象呢？老師揭開謎底之前，不妨先讓學生根據剛才的計算經驗作推論解釋，相信他們即使解釋比較粗疏，但亦能道出當中的部分的前因後果，例如：兩個連續的數字形成個位的差必定是1、十位和百位必定要借位……等。這類的訓練在小學的數學課堂比較罕有，但我們正需要多培養學生對數學規律進行觀察、分析、推論，進而嘗試利用數學語言表達。當然老師亦需要更有系統地闡述當中因由，以協助學生更完整地理解整個現象。這時，我們需要一些算珠或數粒。一般利用算珠展示減法過程時，我們會配合直式由個位開始，按位值逐步取走算珠，遇到不夠減的時候，就向較大的位值借一化作十。過程大概如下：

2112 -1221



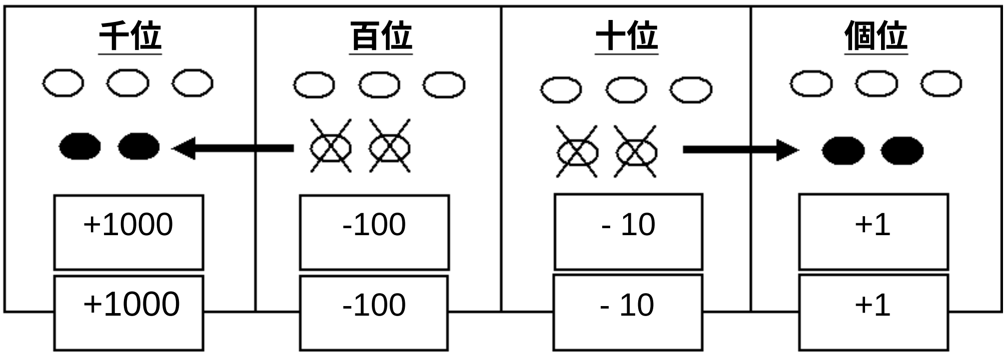
得出結果為891。

但這樣將減法過程逐一展現，只反映了計算過程，卻未能揭示由一數轉換成另一數時，數字變化的規律，難以讓學生歸納出一個有規模的理論。這時，我們需要新的思維方向，我們可以將「2112–1221=？」想為「如何將 1221變為 2112？」，情況如下：

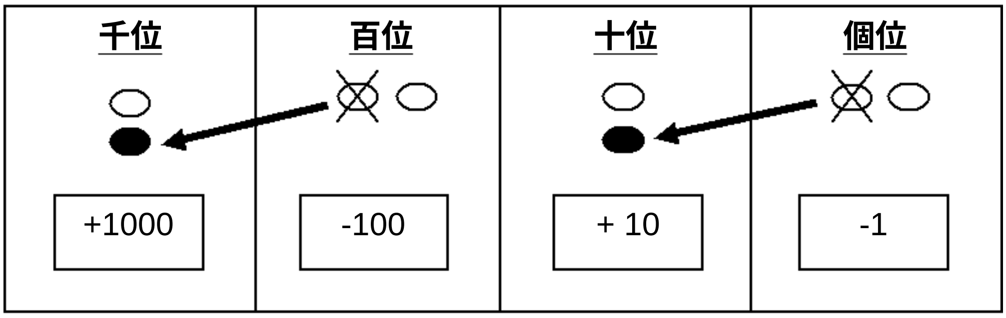


這樣，我們便能清晰地看到將算珠由1221 移動成2112 時，每次的移動對整個數值的影響，例如：將百位的算珠移到千位會令整體數值增加900(＋1000－100)。因此，按算珠移動的方向，可以得出整體數值增加了891(＋1000－100－10＋1)。利用移算珠，學生可以觀察到無論是3223－2332、5445－4554 或是 9889－8998，每次都是由百位移動一粒算珠至千位，由十位移動一粒算珠至個位，所以它們的差都是891(＋1000－100－10＋1)。

無疑這個方法的思考方向有別於一般香港小學數學的學習，但我們正需要其他方向的思維模式去凸顯位值間的關係，以刺激學生更立體地認識我們的十進位值記數系統。而且，這個思維模式有一定的延展性。根據以上的觀察，我們可以很快推測得到當兩個一位數字相差大於一，而以同樣的原則組合成四位減法時，它們的差與891 有倍數的關係。例如取兩個相差 2的數字(3 和 5)，組成5335－3553，根據下圖的過程，可以得兩組891(＋1000－100－10＋1)，所以差便是891×2 = 1782。

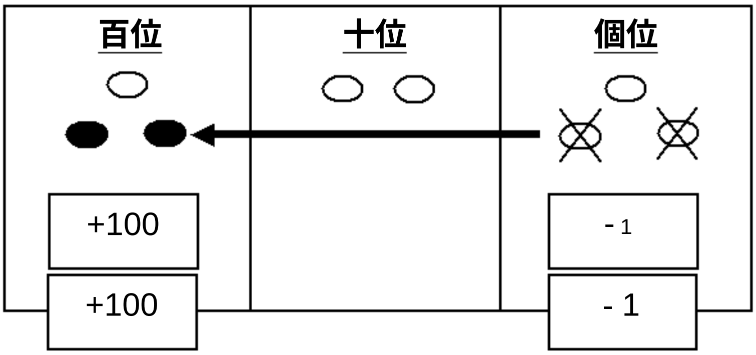


有了這個認識後，學生可以自行發現並解釋其他數字組合的規律，例如 <u>**Der NANA-Zahlen**</u> (9898－8989、8787－7878、7676－6767……2121－1212)**，利用算珠將一數移動變成另一數，不難現這類組合的差是相同的，答案都是**909 (＋1000－100＋10－1)。



能讓學生進一步了解數系統運作的數學遊戲，以上提及的只是鳳毛麟角，只要老師們能放眼探索，必定能發現更多能開拓學生的話題。相信大家對「奇妙的1089**」這個遊戲一定不感陌生，先任意取三個數字(例如：**1、2、3)**，組成最大的三位數和最小的三位數，求它們的差(即：**321－123 = 198)**，再將差的個位和百位數字對調(即：**891)**，求這兩個三位數的和(即：**198＋891 = 1089)。**依照以上原則，學生會發現無論取哪三個數字，最後得出的和都是**1089。**這是一個讓學生驚訝的數字魔術，但要如何向學生解釋呢？**

如果學生能夠掌握利用算珠將一數移動變成另一數的思考方向，他們必定能從另一個角度，推敲出任何三個數字所組成的最大三位數和最小三位數之差存在一定規律，它們的差必定是800－8、700－7、600－6……**或**100－1**，以**321－123**為例，在**3、2、1**三個數字中，最大數字和最小數字相差**2**，所以這兩個三位數差就是**200 - 2 。



因此，它們的差只有以下八個可能性：792、693、594、495、396、297、198。**至於這八個數的個位數字與百位數字相對調之後，為何它們的和總是** 1089**？這個問題的答案就變得顯然易見了。**

以上只是 Arithmetik als Prozess (2004)**第一章所提及的部分「數字遊戲」，引用這些「遊戲」並不是單純地想些法子娛樂學生，亦不是想以這類的思考方法取代固有的運算技巧，而是想引入一種多角度的思考模式，讓學生在學習運算操作外，能更立體地感受、欣賞十進制記數系統設計的精妙。**

在課時緊絀的現今，老師為學生建立概念，然後讓學生明白操作，再而熟練操作，做到快而準的運算，繼而要教授學生解不同的應用題，實在難以再擠出空間進行一些如以上所提及、探究性強的遊戲。然而，在科技發達的現今、智能手機氾濫的年代，我們必需反思對學生來說，到底是運算的快而準的能力重要？還是對已有規律進行分析歸納、猜想，進而作合理推論的能力較為重要？

參考文獻

Gerhard, N. M., Heinz, S., & Erich, Ch. W. (Hg.). (2004). *Arithmetik Als Prozess*. Germany: Kallmeyer

作者電郵：szemany@yahoo.com.hk