

角的教學與測考

劉秀惠

上水惠州公立學校

馮振業

香港教育學院數學與資訊科技學系

緒言

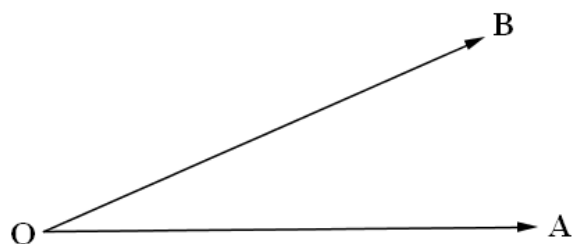
根據香港課程發展議會（2000），角的學習內容出現於小二和小三。然而，角的概念會延續至往後的學習單元，例如：方向（由北方順時針轉一個直角，便是東方）、垂直與平行（以直角引入垂直線）、四邊形（藉角的認識探討四邊形的特性）等。因此初小學生必須對角的概念有很好的理解，為日後建構更高層次的幾何概念打好根基。

數學化教學是重視學理鋪陳的教學法。在設計教學前，教師必須對學理結構有很好的掌握，才能有效地佈置和處理教學上的每一個細節。本文以角的教學為主題，從學理入手，深入地分析由直線衍生的角的定義，並介紹一個適用於小學課堂的教學方案，及其執行時的注意事項。最後會探討在這個方案底下學習的學生，將如何面對測考，期間又會遇上怎樣的困難。

角的定義

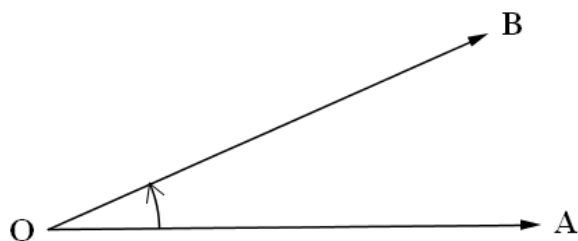
由直線生成的角有三大類，分別是平面角（Plane Angle）、二面角（Dihedral Angle）和多面角（Polyhedral Angle）。香港小學數學課程由二年級開始引入角的概念，當中涵蓋的只有平面角。雖然二面角和多面角均不在課程範圍之內，但不代表這些概念不會在教學過程中浮現。先行釐清三種角的意義，有助教師更有效地洞悉學生各種可能出現的誤解。

不同的學者對平面角下了不同的定義，當中大致可分三類。第一類定義是把平面角看作是由一端點引出兩條射線所形成的圖形。如圖一所示，端點 O 引出兩條射線 OA 和 OB ，形成角。其中 O 稱為角的頂點（Vertex），而 OA 和 OB 稱為它的邊（Side）（文耀光，2007）。



圖一

第二類定義是把平面角看作是由一射線繞著其端點旋轉所形成的圖形。如圖二所示，把射線 OA 繞著端點 O 旋轉至另一個位置 OB ，便形成角。 OA 稱為它的始邊 (Initial Side)，而 OB 稱為它的終邊 (Terminating Side) (文耀光，2007)。



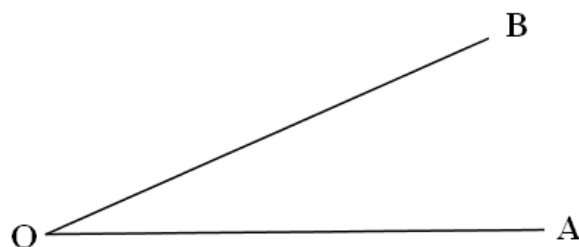
圖二

由此引申的角的大小，取決於角其中一邊旋轉的程度，其旋轉程度愈大，所形成的角就愈大；反之，其旋轉程度愈小，所形成的角就愈小。由於旋轉是可以無限地繼續下去的，所以角的大小並無上限 (Chauvenet, 1870)。同時，角其中一邊可以向順時針或逆時針方向旋轉，為了區分兩種不同的旋轉方向，就得分為正角和負角，角的大小亦分別用正數和負數表示。

不管是第一類還是第二類定義，要在小學課堂運用，學生必先掌握何謂射線。可惜，這概念並不在香港小學課程之內。即使中國大陸的課程，也只在第二學習階段（即四至六年級）才會介紹射線（中華人民共和國教育部，2012）。換言之，要在二年級和三年級（香港課程要求）以射線教授角，非下大量額外功夫不可。要令學生能夠看著畫在紙上的射線的有限部分，理解背後無窮延伸的意義，會否成功，有待實踐確認。撇開射線一項共同障礙，首兩類定義在課堂運用上，卻存在鮮為人注意的微妙差別：前者是靜態的，而後者則是動態的。換言之，第一類定義描繪的是一幅硬照，學生看到的角，不容易令他們聯想到超越一周角的情況，而且也無方向可

言。相反地，第二類定義描繪的是一個旋轉的過程，學生有可能要問轉動多於一圈的情況，而且要考慮旋轉的方向。嚴格來說，第一類定義所得的角的大小，還需要作些補充說明。如果不加插有方向性的元素，角的大小大概可用純量表達。第二類定義所得的角的大小，則毫無疑問是向量，而且要處理大於一周角的情況。

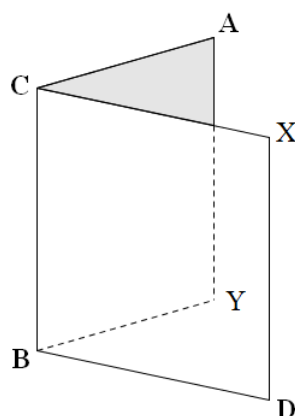
第三類定義是把平面角看作是由一點（稱為角的頂點）伸出兩條直線（稱為角的兩邊）所得的圖形。把這個定義略為修改，便得到一個常見於小學課本的說法：「兩條直線相交生成角。」如圖三所示，兩條直線 OA 和 OB 相交於一點 O ，形成角。其中 O 稱為角的頂點，而 OA 和 OB 稱為角的兩條邊（Smith & Ulrich, 1957）。



圖三

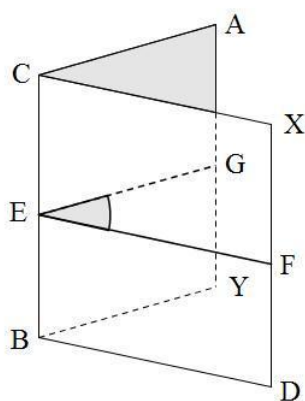
總括而言，運用射線定義角，可以直接掃除角的兩邊長短不一對學生理解角的大小的影響，不過就得先攻破學生理解射線的困難。如果用第二類定義，就是以旋轉的程度闡釋角的大小，明確之餘卻要面對旋轉方向和超越一周角的情況。第三類定義最為簡樸，學生易明但卻不知教授角的大小時會有多少波折。

二面角和多面角的概念通常出現於中學或以上的課程，教授時面對的掣肘較少。二面角是指兩平面相交所形成的圖形。如圖四所示，平面 $ACBY$ 和 $XCBD$ 相交於直線 BC ，形成二面角。直線 BC 稱為二面角的稜 (Edge)，平面 $ACBY$ 和 $XCBD$ 分別稱為二面角的兩個面 (Face) (Smith & Ulrich, 1957)。



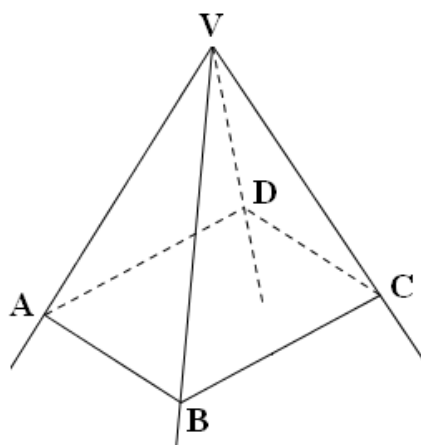
圖四

二面角的大小藉平面角的大小定義（圖五）：從二面角的稜上任意一點，在兩平面內分別作一條垂直於稜的直線，這兩條直線相交生成的平面角的大小（ $\angle GEF$ ），就是二面角的大小（Smith & Ulrich, 1957）。



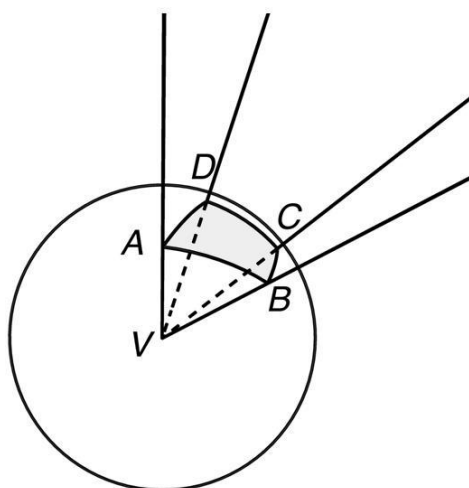
圖五

多面角是指三個或以上的平面相交於同一點所形成的圖形。如圖六所示，平面 AVB 、 BVC 、 CVD 、 DVA 相交於一點 V ，形成多面角。端點 V 稱為多面角的頂點，平面相交於直線 VA 、 VB 等，稱為多面角的稜；相鄰兩稜間的平面部分稱為多面角的面；而 $\angle AVB$ 、 $\angle BVC$ 等就稱為多面角的面角（Chauvenet, 1870）。



圖六

多面角的大小，是以半徑為 1，球心在角的頂點的球體，與多面角（視作由射線定義）相交截出的面積（圖七）來定義（Hazewinkel, 1995）



圖七

奠定概念教學的基礎

教學上首個難關，就是要找一個滿足以下條件的平面角定義（如非特別指明，下文提及的角皆為平面角）：（一）學生容易明白；（二）可令角的大小容易理解，而且比較角的大小的操作容易進行；（三）不必處理旋轉的方向；及（四）可避過超越一周角的討論。

這裡介紹一個符合上述要求的方案：採用第三類定義，並以角兩邊張開的幅度闡釋角的大小。角兩邊張開的幅度愈大，所形成的角就愈大；反之，角兩邊張開的幅度愈小，所形成的角就愈小。換言之，只要透過比較

角的兩邊張開的幅度，就能比較角的大小。根據上述理解，學生不難發現角的大小不受角兩邊的長度、標示弧線的長度、標示扇形的大小所影響。

教師可以考慮採用摺扇（圖八、圖九）作教具，向學生展示角兩邊張開的過程。由於角的兩邊同時向兩方張開，故沒有談方向的需要。同時，第三類定義的角是靜態的，超越一周角的討論不會自然浮現，課堂內教師較容易避過相關的討論。



圖八



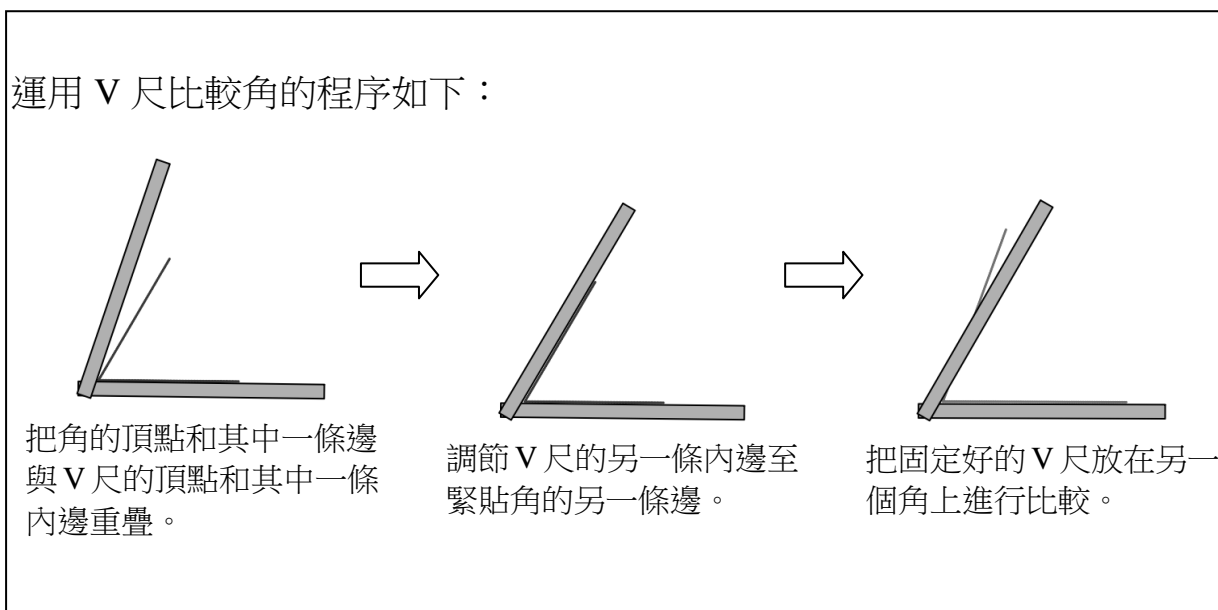
圖九

比較角的大小時，初小學生可運用以下程序：把兩個角的頂點和其中一邊重疊，使得另外兩邊都在重疊邊的同一方，然後藉著觀察另外兩邊的位置，檢視兩個角哪一個張得較開。如果角的頂點和兩邊均完全重疊，即兩個角（的大小）相等。

若兩個角不能移在一起，學生可運用膠片把角複製然後進行比較；若兩個角處於不同的兩張紙之上，可以重疊紙張，並以陽光測試觀察非重疊

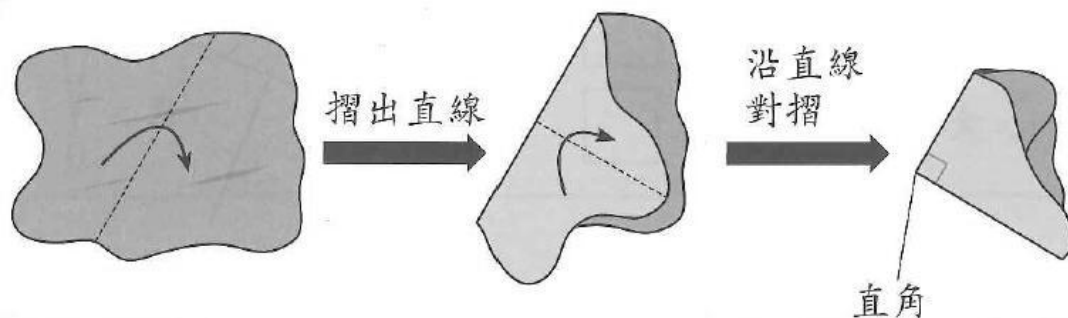
邊的位置；若期望學生更快地進行比較，也可借助由兩片厚卡紙奉拴起而成的 V 尺。

在數學化團隊之內，V 尺已被廣泛地使用了好一段日子（李、馮，2009）。比較角的大小時，可按照以下程序，運用 V 尺作橋樑，快速地進行檢測。



當角的大小有著明顯的差異時，學生通常傾向直觀比較，不會啟動上述嚴謹的程序。遇有疑惑，上述科學化的比較法，是處理爭議的客觀標準。

在這方案的基礎下，直角、銳角和鈍角的概念教學，可以輕易地完成。如果兩條直線相交生成的四個大小完全相同的角，稱這些特別的角為直角。教師可考慮以摺紙的方式向學生介紹直角。只要按照特定的程序就能摺出直角，「製成品」更可作為直角檢測器。有了檢測器便可分辨直角，自然也可分辨銳角（小於直角）和鈍角（大於直角，小於兩個直角）。摺直角的程序：

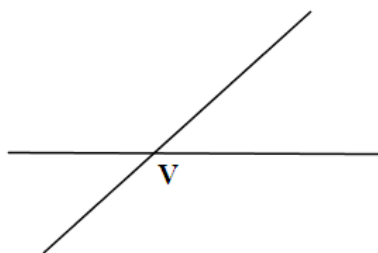


(馮、陳、周等，單元 3，頁 14)

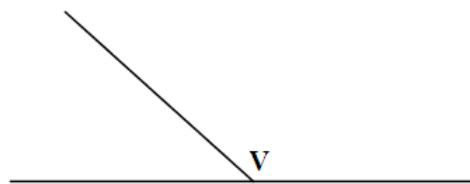
處理教學執行的細節

單憑完善的教學方案並不足以解決所有教學問題。平面角是一個抽象的幾何概念，課堂內教師必須極度小心地處理教學語言、執行細節和教學材料等，免得混雜其他角的概念（二面角、多面角等），慎防學生走進岔路。

日常生活中所談到的「角」（牛角、桌角等），容易給予學生「尖銳」、「尖細」的印象。因此他們經常不自覺地把這些印象套用在平面角上，誤以為「尖尖的地方」（即角的頂點）就是角。雖然角的頂點很多時也是尖尖的，但圖十和圖十一中的點 V 也是角的頂點，故以「尖尖的」來形容它，潛藏誤導的風險。若教師能夠精準地運用數學語言，以「兩直線相交的點」闡釋角的頂點，便可大大減低學生在建構新知識時，產生誤解的機會。

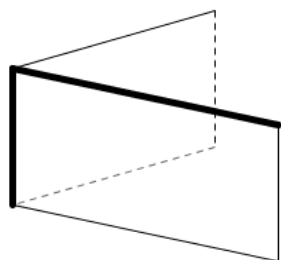


圖十

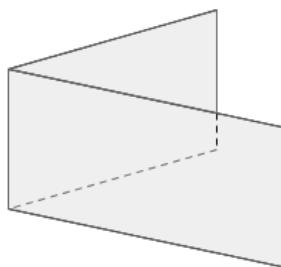


圖十一

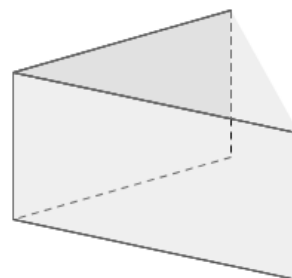
不同種類的角，可以在同一處境中存在。「找出課室裡的角」，相信是角的教學中常見的課堂活動，其目的是檢測學生是否能夠分辨日常生活中的平面角。課室裡的角有很多，就以「桌角」為例，學生除了可以把它看作是由圖十二中兩條直線相交所形成的平面角外，他們也可把它看作是由圖十三中兩平面相交所形成的二面角；同時，他們亦可把它看作是由圖十四中三個平面相交所形成的多面角。



圖十二

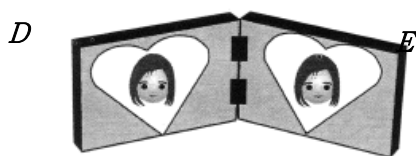


圖十三

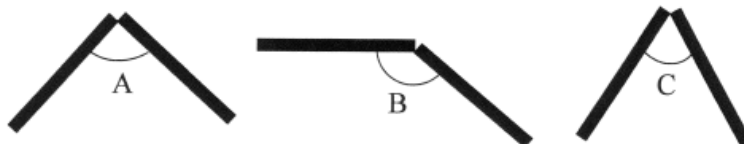


圖十四

因此教師必須讓學生走近課室裡的角，並請他們指出該角是由哪兩條直線相交所形成的，才能確保學生學到的是平面角的概念。



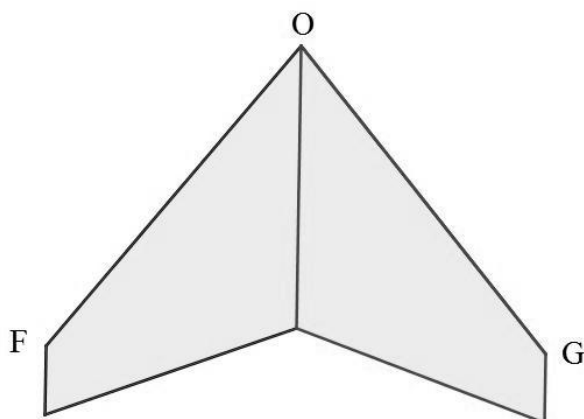
以下是擺放相架時形成不同的角度：



最小的角是 _____。

(修改自 2006 年全港性系統評估 小學三年級數學科 分卷一 題 33)

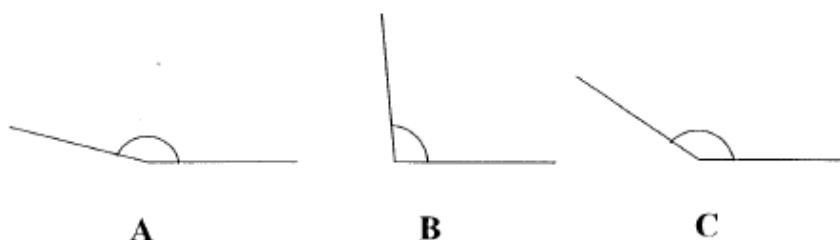
像上題擺放的相架，同樣形成多於一種角（平面角和二面角），與「桌角」的情況相似，潛伏混淆。此外，當相架由兩個長方形組合而成時， OD 與 OE 相交生成的平面角，與兩長方形生成的二面角的大小相等。然而，這是一個特殊情況。倘若相架並非由矩形組合而成，而是改用直角梯形（圖十五）， OF 與 OG 相交生成的平面角必定小於兩直角梯形生成的二面角。誠然，要杜絕這類含糊的教學場景，教師必須對學理有透徹的理解，才能有意識地、準確地佈置教學的每一個細節，避免出現混淆的情況。



圖十五

坊間不少教材，包括全港性系統評估（TSA）的題目，所構作的角都過於「整齊」。「整齊」是指角的兩邊等長，以及不同的角，其兩邊的長度和弧線標示的位置也一樣。如例 1 中的角：

（例 1） 把下列的角由小至大排列出來。



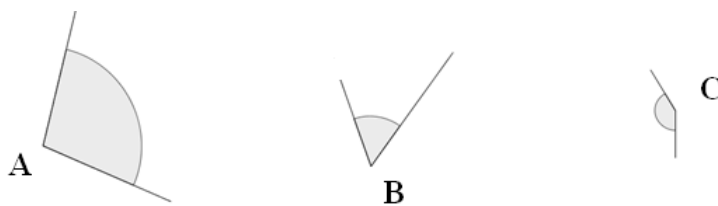
答案：_____，_____，_____

(最小) (最大)

（取自 2004 年全港性系統評估 小學三年級數學科 分卷一 題 19）

學生面對這類「整齊」的題目時，儘管他們以標示弧線的長度，或標示扇形的大小，而非以角兩邊張開的幅度比較角的大小，也能從題目得出正確答案。可是，以同樣的方法應用在「不整齊」的題目上，如例 2，便不再奏效了！

（例 2） 把以下的角由小至大排列起來。



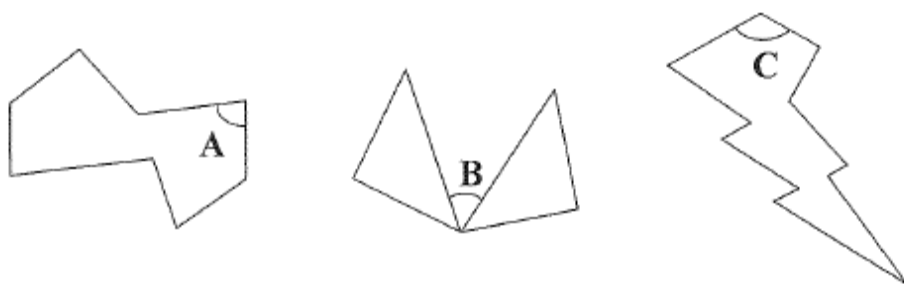
答案： _____ ， _____ ， _____
 (最小) (最大)

由此可見，這類「整齊」的題目效度未如理想，即使學生有錯誤或不清晰的概念，亦有可能從中得出正確答案。因此學生的作答未必能夠準確地反映其學習成效。此外，學生長期接觸這類題目，有可能誤以為角的大小還可取決於標示弧線的長度，或標示扇形的大小。同時，他們亦有可能誤以為角的兩邊必須等長。就這兩點，教師必須多加注意，莫讓學生受「整齊」的角所誤導。

面對測考

「比較角的大小」是測考卷中常見的題目，很多擬題者傾向收窄題目中角的大小的差異，如例 3，藉此增加題目的難度。無可否認，題目的難度的確增加了。可是，增加的卻只有直觀比較的難度。

(例 3) 把下圖中 A、B 和 C 三個角由大至小排列出來。



答案： _____ ， _____ ， _____
 (最大) (最小)

(取自 2010 年全港系統性評估 小學三年級數學科 分卷一 題 33)

要圓滿地解答這類題目，學生通常傾向啟動比較角的程序。可是，在測考時除了數學文具外，學校或考評局均不允許學生使用其他工具。即使學生懂得以科學化的比較法解題，卻礙於環境所限，以致方法難以執行。在這個情況下，有些學生會以直角作中間人，協助觀察非重疊邊的位置。

無奈，這只是權宜之計，他們終究還是依靠直觀比較。因此，可以說考方根本沒有提供一個合理的環境，讓學生完成題目！此外，教師亦不能從題目的答案中判別學生是未能掌握「角的大小取決於兩邊張開的幅度」，還是未能準確地直觀比較，使他們難以對症下藥。

曾於測考現場親眼目睹一名學生在處理這類題目時，利用兩枝鉛筆複製一個角兩邊張開的幅度，然後再移到另一個角上作比較。可惜，在移動鉛筆時，他難免改變了原本複製好的角。因此他重複了好幾次上述的量度動作，才能勉強地完成題目。縱使這位學生抱持認真的解題態度，但他亦未必能夠準確地比較角的大小。這種測考上的局限，難免消磨學生的意志，更可能對其日後的學習態度帶來負面影響。

其實課程發展議會（2000）並沒有指明學生要使用甚麼比較方法，究竟他們期望學生是以實作的方式，還是單憑直觀比較？既然沒有指明比較的方法，那麼學生可以帶 V 尺進考場嗎？學生可以使用其他工具和方法嗎？曾經有初小學生提出使用量角器（在考場內理應是被允許使用的工具），可是以量「度」角度的部分被編入小五增潤課程，那麼初小學生使用量角器解題，教師們應接受嗎？以上提出的種種問題，在此不作深究，留待各位教師和課程發展議會深思和解決。

結語

也許有人認為，初小學生要學的只是「兩條直線相交生成的角」罷了，這個概念三言兩語便能說個明白，何必大費周章地處理一籊籊的學理。縱使角的概念不難說明，但當它置身於一個充滿千百樣想法的課堂中，學生不知會走進多少岔路。因此教師必須充分掌握學理基礎，才能編訂良好的教學方案，及有意識地避過教與學的難關，為學生締造高效的學習過程。

參考文獻

- Chauvenet, W. (1870). *A treatise on elementary geometry*. Philadelphia: J.B. Lippincott.
- Hazewinkel, M. (Ed.) (1995) *Encyclopaedia of mathematics: An updated and annotated translation of the Soviet "Mathematical Encyclopaedia"*. Dordrecht: Kluwer.
- Smith, R. R., & Ulrich, J. F. (1957). *Solid Geometry*. New York: Harcourt, Brace & World.

中華人民共和國教育部（2012）。《義務教育數學課程標準（2011年版）》。北京：北京師範大學出版社。

文耀光（2007）。《幾何與度量》。香港：教育出版社有限公司。

李婉婷、馮振業（2009）。數學化教學的教具與學具應用。載黃家樂、李玉潔、潘維凱、鄧國俊（編）。《香港數學教育會議 2009 論文集》（頁 93—94）。香港：香港數學教育學會。

香港考試及評核局。《小三全港系統評估》。評估考卷及評估參考。取自：
<http://www.bca.hkeaa.edu.hk/web/Common/res/2004priPaper/math/M1C.pdf>

香港考試及評核局。《小三全港系統評估》。評估考卷及評估參考。取自：
http://www.bca.hkeaa.edu.hk/web/Common/res/2006priPaper/P3Math/2006_TSA_3MC1.pdf

香港考試及評核局。《小三全港系統評估》。評估考卷及評估參考。取自：
http://www.bca.hkeaa.edu.hk/web/Common/res/2010priPaper/P3Math/2010_TSA_3MC1.pdf

馮振業、陳麗萍、周惠英、劉心怡、馮仲頤（2012）。《校本單元數學學習套》。2 上。香港：牛津大學出版社。

課程發展議會（2000）。《數學課程指引（小一至小六）》。香港：教育署。

首作者電郵：lausauwai@gmail.com