藉「觀察規律」處理畫鐘面的困難

陳芷茵
嘉諾撒聖方濟各學校

緒論

「觀察規律」是一種重要的數學能力，理應於學生的學習歷程中佔有重要的角色。隨意翻開一些數學練習書，不難發現當中常以找一些數列的缺項作為訓練「觀察規律」的手段。然而，這種想法存在學理上的缺陷。作為一位專科數學教師，有必要深思怎樣才算有意義的「觀察規律」活動。

本文先從數學學理的角度出發，探討怎樣才算是有意義的「觀察規律」活動。接着介紹如何藉小二「時間」課題裏的鐘面運動規律，設計完整且有意義的「觀察規律」活動，並報告施教的結果。從中可以看出，讓學生參與觀察鐘面運動活動，既可培養學生的探究能力，又可解決學生於畫鐘面時，時針位置偏差過大的問題，可謂一舉兩得。

數學科的「觀察規律」

要「觀察規律」，必先確認存在可供觀察的規律。在探究的過程中，探究者會猜想其中的規律，然後以實際數據印證猜想。遇有偏差，會修訂猜想，再引用實際數據重複檢測。常見的找數列缺項的練習，無法讓學生經歷這個完整的觀察規律過程。從以下的一道求數列缺項的習題，可說明其中道理。

例題：觀察數列的規律，填寫適當的數字。

3 ，5 ，7 ，___ ，___ ，____。

大家可能毫不猶豫地答到是 9，11，13。那麼，若學生填上 11，17，27 又是否錯誤呢？事實上，該數列可以按不同的規律衍生，以下是其中 3 個可能（中華人民共和國教育部，2001，頁 65）：

1）9，11，13，形成奇數列；

2）11，17，27，數列從第三個數開始，每個數都是前兩個數之和減 1；

3）27，181，4879，數列從第三個數開始，每個數都是前兩個數之積減 8。

從數學學科的眼光來看，以上這種題型不能算作是一種「觀察規律」的訓練。因為在學理上，後面的未知數是什麼也可以，只要將之代入一條插值公式中，答案便可以有無窮無盡之多。關於這種數列續項問題，有興趣可參看“Mathematics made difficult”(Linderholm, C. E.，2008)的有趣論述。由此可見，從學科的內部邏輯看，這種求數列缺項的習題，並不存在特定可供觀察的規律。

若從學生的角度看，這種設問方式亦不能算作理想的「觀察規律」練習。很多時候，教師可能會因為學生答的不是那個「標準答案」而當作錯誤。但事實上，後面的未知數是什麼也可以，故此，應注意的並不是學生答對老師心目中的那個數，而是學生對答案的解釋。學生真正可以做到的，只是說明按照某一規律，可以得出全部已知的各項，同時按此規律可得出要求的缺項。過程當中，學生並不能以實際數據印證自己對規律的猜想，再按更多的數據把猜想修訂。

既然，上述數列缺項的題型並不能真正地訓練學生「觀察規律」的能力，那麼，如何在有限的課時裏，為學生創造有意義的「觀察規律」活動，就更值得教師思考了。

小二時間教學的骨架方案

回顧香港的數學課程，小二時間課題涉及的鐘面運動，就存在着特定可供觀察的規律。而將有意義的「觀察鐘面規律」活動放進課程內容之時，亦需配合該課題對學生的考核要求。

筆者就時間課題參考了小學三年級《全港性系統評估》（TSA），其考核不單要求學生看鐘面報時，更要求學生在鐘面上畫出時針和分針（畫鐘面）來表示時間。評估報告指出，學生不善於在鐘面上以時針及分針表示時間，忽略了時針相對分針的正確位置。加上評分準則常變，欠缺一致性（馮振業，2011），若學生只隨意地將時針畫在兩個時正之間並不足夠，必須對時針與分針的聯動關係有一定的掌握。

爲了創造一個完整有意義的「觀察規律」經驗，並克服學生畫時針位置偏差過大的困難，數學化團隊以小二時間課題設計了一個方案，就是讓學生觀察鐘面上時針和分針固定而又隱藏的運動規律。學生在探究過程中，能以實際數據印證自己對時鐘運動規律的猜想，並在有需要時修訂猜想，再以實際數據重複檢測。經過猜測、檢測、修訂猜測的循環過程，學生能抽取時針和分針運動的共性，歸納出時針與分針的聯動規律（即時針走了 1 小格，同時分針走了 12 小格）。

若將「觀察規律」的學習融入其他課題（如小二「閏年」的教學），又會有怎樣的效果？教師儘管可以提供多年的二月份月曆，引導學生觀察每四年一閏的規律。但這樣一來所運用的課時實為不少，而學生的學習效果卻未必有明顯的分別。在比較之下，將「觀察規律」的學習放入小二時間課題中，既能在緊湊的課時內讓學生作重要的數學能力訓練，又能對準課程測考的要求，實為「完美的結合」。

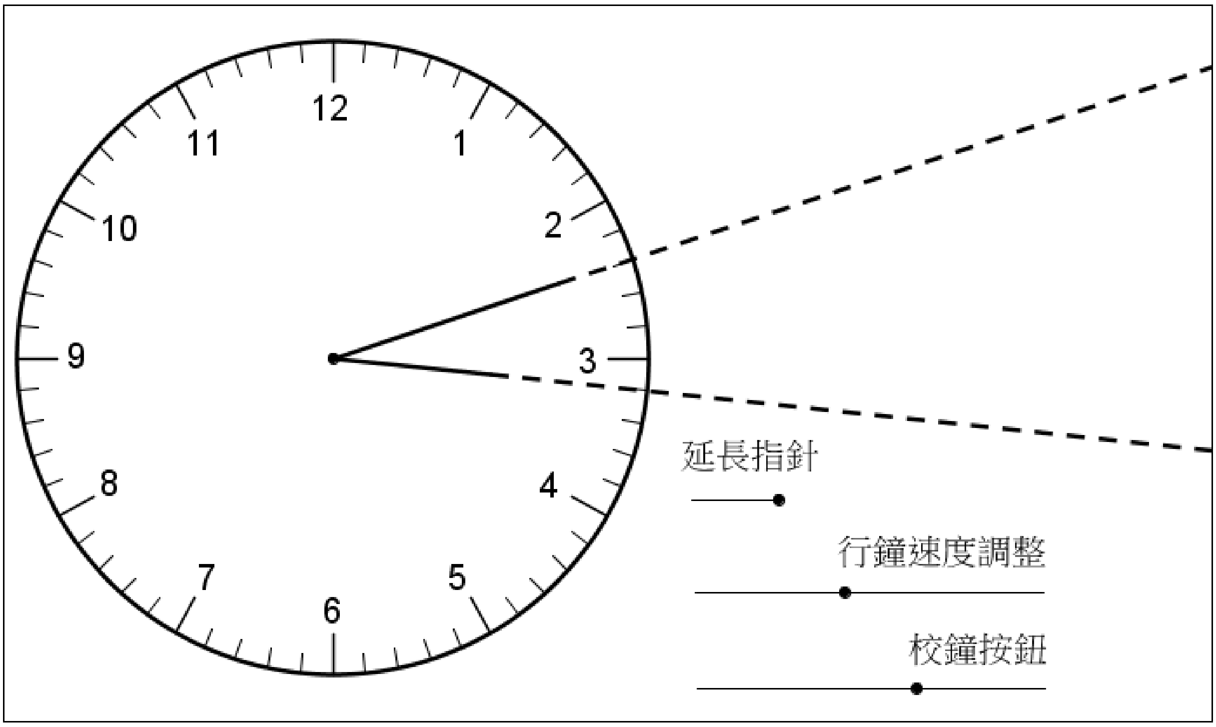
是次「觀察鐘面規律」的教學設計，充分體現數學化教學所追求的學習品質。不但追求在測考中反映的理想學習成效，更致力把具一般性的數學思考方法滲透在不同課題的學習過程中（馮振業，2007）。整個骨架方案，藉著鐘面的運動來創造一個觀察規律的情境，讓學生在有跡可尋的情況下找出鐘面隱藏着的固有規律。透過觀察這些明確的鐘面刻度，有效幫助學生正確地畫出時針相對分針的位置。在充分照顧學理的同時，也處理到學生「畫鐘面」的學習難點。

執行方案的構思及細節

明顯地，時針和分針的運動並不止於聯動傾向，更存在着獨有的規律。而課程的測考，要學生正視時針相對分針的正確位置，就更凸顯出讓學生發現鐘面運動規律的重要性。肯定了時針和分針的運動規律，是值得讓學生發現之後，剩下值得深思的，就是如何鋪排一系列的教學活動，讓學生深入探討這個隱藏了的鐘面規律。

在觀察鐘面運動規律的教學中，首要任務是如何在課室裏清晰而準確地向學生呈現鐘面運動。若使用一般的教具聯動鐘，都會出現較大的誤差，以至無法準確地完成整個「觀察規律」的過程。爲了提高可行性，需運用數學化團隊設計了用於 GeoGebra 動態幾何平台上的教件（如圖一）。當中加設「延長指針」、「校鐘按鈕」和「行鐘速度調整」等功能，有效提升

指針指向位置的清晰度，學生在觀察的過程中對指針位置一目了然，並可透過反覆地觀察時針（藍色）和分針（紅色）的運動，以獲得實際數據來修訂自己對規律的猜想。

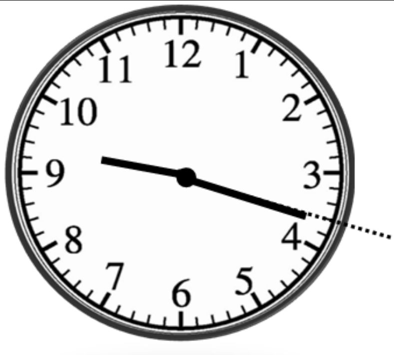


圖一 GeoGebra 動態軟件製作的聯動鐘[1]

在討論觀察鐘面運動規律的教學細節前，需將其放在「時間」課題裏，作學習內容的前後連接。而學生在進入觀察規律的學習前，必須已懂得以「時」「分」報時，掌握「時」和「分」的意思。當中，教師更需謹慎區分「鐘面現象描述」與「時間描述」，並完整地把它們對應起來。例如以指針走了多少大格或小格來描述鐘面指針轉動的程度，同時，將這鐘面現象對應着時間過了多久的描述（如圖二）。

[1] 上課時的軟件檔案，時針為藍色及分針為紅色，以加強對照效果，此處並無顯示。

1



時針在 數字____ 和 數字 ____ 之間

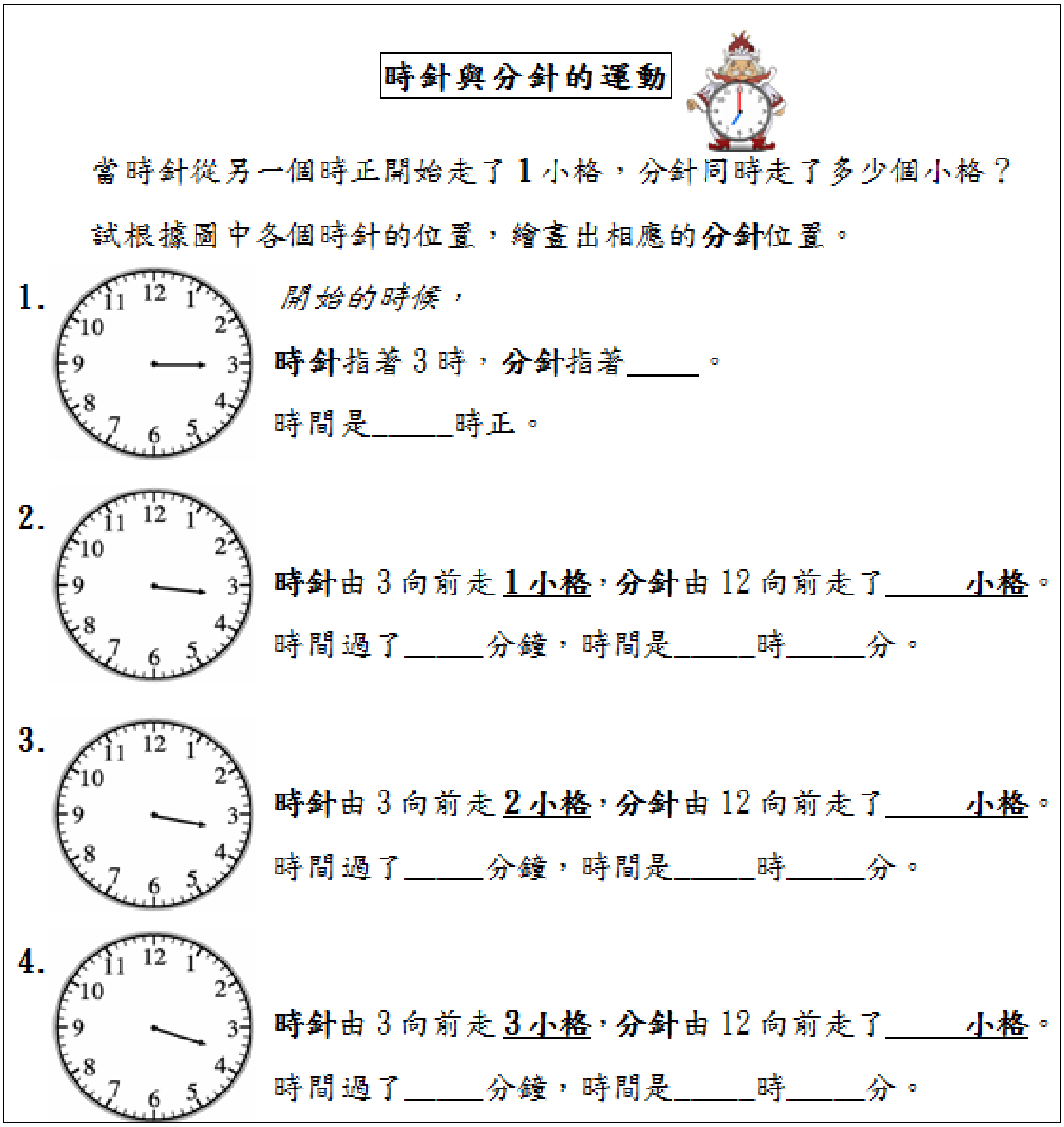
分針走到第 _____ 小格，時間過了 _____ 分鐘

所示的時間是__________________

圖二 節錄自「時」「分」報時工作紙

學生有了「報時」和「畫分針」的基礎後，便進入觀察與歸納鐘面運動規律的部份。在學習「報時」的部份，學生已知道當時針向前走了 1 大格，同時分針向前走了一圈。在這個時候，教師提問：「當時針向前走了 1 小格，分針走了多少？」先讓學生猜猜，然後帶領全班以觀察與記錄的形式，從 3 時正開始進行觀察。在得出「時針由“3”向前走了 1 小格，分針由“12”向前走了 12 小格」的結果時，學生能以實際數據印證自己的猜想，若有偏差，學生能立即修訂猜想。

筆者再提問「當時針向前走了 2 小格，分針走了多少？」。此時，再引用實際的數據，學生就能檢測自己前次的修訂。通過不斷觀察鐘面，學生在心中逐漸對鐘面運動的規律形成念頭與猜想。當在鐘面規律前段的猜想得到證實與肯定，學生便更掌握以累加的方式作後段的猜想。重複通過猜想、檢測、修訂猜想的步驟，直到歸納出一個完整的規律（即實踐所見，學生指的「魔術數字」：12，24，36，48，60）。同時，學生需跟從「時針向前走幾多小格，分針向前走幾多小格」的數學語言模式，配合着工作紙作記錄與朗讀（如圖三）。



時針與分針的運動

當時針從另一個時正開始走了 **1** 小格，分針同時走了多少個小格？

試根據圖中各個時針的位置，繪畫出相應的**分針**位置。

1. *開始的時候，*

時針指著 3 時，**分針**指著_____ 。

時間是______時正。

2. **時針**由 3 向前走 **1 小格**，**分針**由 12 向前走了______**小格**。

時間過了______分鐘，時間是______時______分。

3. **時針**由 3 向前走 **2 小格**，**分針**由 12 向前走了______**小格**。

時間過了______分鐘，時間是______時______分。

4. **時針**由 3 向前走 **3 小格**，**分針**由 12 向前走了______**小格**。

時間過了______分鐘，時間是______時______分。

圖三 節錄自「觀察時針與分針運動」工作紙

接下來，學生運用觀察歸納得出的結果（魔法數字），配合「畫鐘面」的程序，畫出時針相對分針（12，24，36，48，60）的位置。筆者教授的程序是先鎖定時針會在哪兩個數字之間（學生需要圈出數字），然後再考慮分針走到哪裡，從而決定時針相對走到第幾個小格（學生可以寫出「魔法數字」協助）。過程中，學生如工作紙的指示，每次「畫鐘面」時都會重複口述相同的程序（如圖四），逐步跟從執行。通過重複演練，學生就能依從一貫的程序，熟練地畫出鐘面，培養有利學習數學的工作習慣和態度。

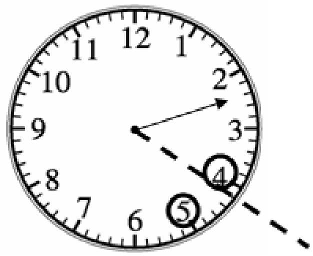
1，2 ，3 ，4 ，5
12，24，36，48，60

1. 把 $\boxed{\text{4 時 12 分}}$ 的時針畫出來？

a. 時針會在數字__4__和__5__之間。

b. 分針走到第 12 小格，時針走了__1__小格。

c. 時針應畫在數字__4__後的第__1__個小格。



圖四 節錄自「畫鐘面」工作紙

當學生內化了畫鐘面的程序，筆者再引入分針在「魔法數字」之間相對的時針位置，學生就能輕易掌握。得出分針在 12 和 24 小格之間，時針會在第 1 和第 2 小格之間；分針在 24 和 36 小格之間，時針會在第 2 和第 3 小格之間……（學生可以寫出「魔法數字」及箭嘴協助）。

學生表現

若置身於是次觀察鐘面規律的課堂中，定能感受到學生當時高漲的學習情緒。他們踴躍地對時鐘的下一個運動規律作出猜想和發言，並且能立即解釋對「魔術數字」的猜想，如：「因為第 1 個走了 12 小格，所以第 2 個『魔術數字』會是 12+12=24 小格。」學生通過循環地猜想、檢測、修訂猜想，掌握以累加的方法猜想出後段的「魔術數字」，全程由學生帶動歸納出時針和分針相對的運動規律，充分地體驗一個完整及有意義的「觀察規律」的學習。

而藉此「觀察規律」的活動，亦期望有效改善學生畫時針位置偏差過大的問題，以滿足課程與測考的要求。筆者以小學三年級 TSA）歷屆（2004 至 09 年）畫鐘面題目為測卷的考題，共有七題。為配合是次的教學，不止要求學生把指針畫得有聯動傾向，更要求學生仔細地把時針畫在不多於 1 小格的偏差，從而定出以下的測卷評分準則:

4 分：分針指對；時針指對（完全正確）

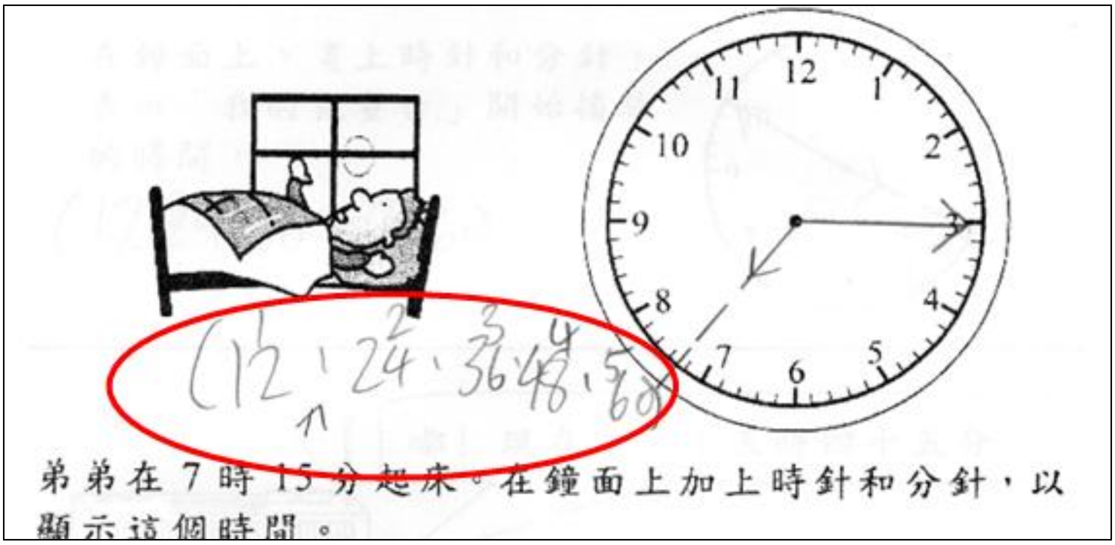
3 分：分針指對；時針在 1 小格的偏差

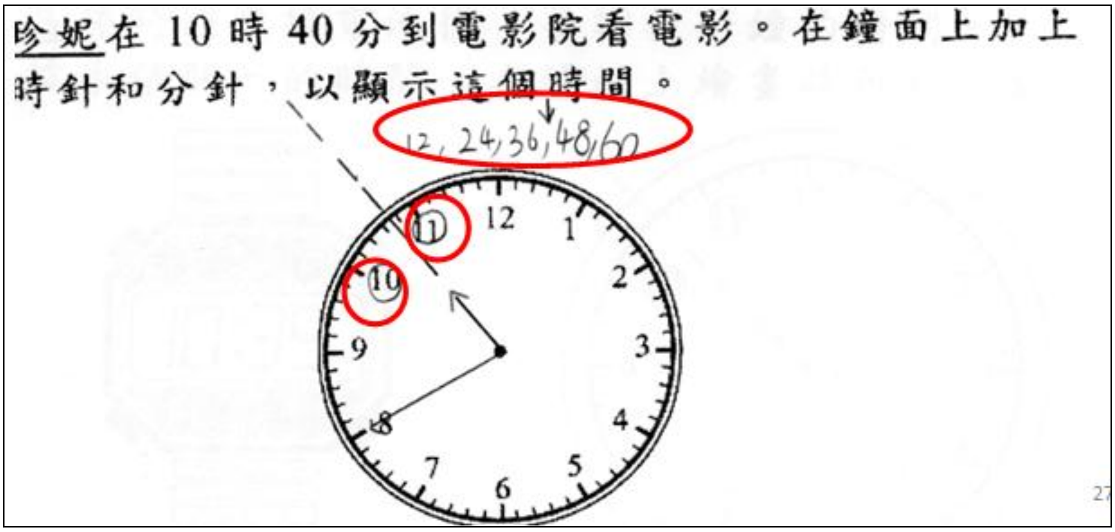
2 分：分針指對；時針在 2 至 4 小格的偏差

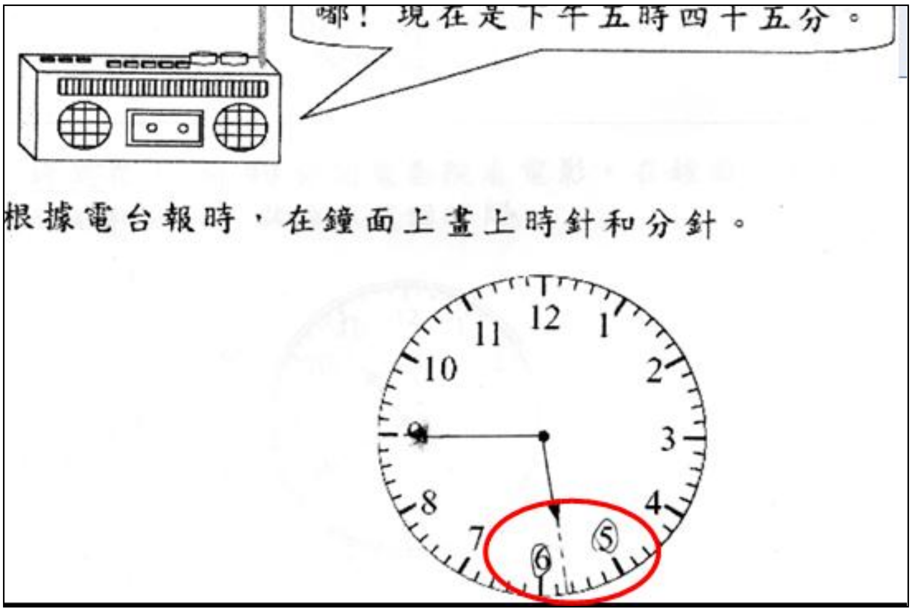
1 分：分針指對；時針直接按幾時指向鐘面上的數字

0 分：分針指錯；時針指錯

學生在此教學設計的學習下，班中達到八成的學生能做到全卷完全正確（每題達滿分 4 分：分針指對；時針指對），學習品質令人滿意。下圖為學生測卷的表現：







從上述測卷表現可見，學生經過觀察鐘面規律的活動，能把時針準確地畫在分針相對的位置，相信可輕鬆地應付 TSA 畫鐘面的考題。而且，學生能遵循所學習的「畫鐘面」程序，如圈出時針在哪兩個數字之間，列出「魔術數字」和加「箭嘴」來輔助，確定時針畫在數字幾後的第幾小格。學生亦因在課堂上以 GeoGebra 教件多次觀察鐘面運動，收得耳濡目染之效，畫出「延長虛線」確定指針位置。

筆者曾與學生就測卷內容作訪談，發現學生皆能以準確的數學語言和程序描述自己所畫的鐘面。數學教師能夠在課堂上習慣運用嚴謹的數學語言，學生就能在潛移默化的情況下，學習使用這些數學語言與老師和同學作學術交流（吳丹，2005）。以上圖 7 時 15 分（06 年考題）為例，學生

能解說：「時針應畫在數字 7 和 8 之間，15 分在 12 和 24 分之間，所以時針應畫在數字 7 後的第 1 和第 2 小格之間。」當再追問時針會貼近第 1 還是第 2 小格時，學生亦能解釋因為 15 分較接近 12 分，所以時針會較貼近第 1 小格。由此可見，學生整體畫鐘面的表現是細緻而準確的，對畫鐘面的程序與數學語言亦有充分的掌握，能透徹地理解鐘面上的聯動關係。

結語

是次的教學成果著實讓人感到欣喜，亦使筆者真切地感受到學生樂於參與濃厚數學氣息的課堂。整個教學設計，不但能滿足課程與測考的要求，亦解決了許多學生畫鐘面時，時針位置偏差過大的問題，更能給予學生一個有意義及完整的「觀察規律」的經驗，使之全程投入於數學能力的訓練當中。作為一位數學教師，有什麼比目睹學生把鐘面畫得準確之餘，又深刻地經歷了有數學味道的課堂來得痛快！

本文是改寫自在馮振業博士指導下完成的畢業論文，謹此致謝。

參考文獻

中華人民共和國教育部（2001）。《全日制義務教育數學課程標準（實驗稿）》。北京 : 北京師範大學出版社。

香港考試及評核局。《小三全港性系統評估》。評估試卷及評估參考。取自：http://www.bca.hkeaa.edu.hk/web/TSA/zh/PriPaperSchema.html

馮振業（2011）。令人沮喪的數學科全港性系統評估。《數學教育》，32 期，2-28。

馮振業（2007）。略述數學化教學的九大關注項目。載梁志強、黎敏兒、潘建強、梁景信（編）。《香港數學教育會議—2007 論文集》(頁 152-164)。香港：香港數學教育學會。

吳丹（2005）。小學數學教學語言運用初探。《數學教育》，21 期，57-62。

Linderholm, C. E. (2008). Mathematics made difficult. In U. Dudley (Ed.), *Is mathematics inevitable?*： *A miscellany* (pp. 305-317). Washington, DC: The Mathematical Association of America. (Original work published 1972)

作者電郵： misschantszyan@gmail.com