在成長中不斷優化的數學定義

梁子傑

循道中學

在第三十三期的《數學教育》之中，刊登了兩篇涉及數學定義的文章[1]，刺激起我的一些想法，故此也來湊湊熱鬧，談談我對數學定義的看法。

在過去幾年，的確多了一些數學教師（尤其是小學教師）查詢某些數學概念正確定義的問題。雖然我並非甚麼權威的人士，對教育理論和認知心理學等也是一知半解，但是在過去的幾年間，我亦回答過好幾次類似的問題。以下是兩個最經常遇到的提問，容許我在此為大家解釋我的觀點。

問題一：0 是否自然數？

顧名思義，「自然數」（Natural Numbers）就是最自然而來的數字。小孩子由呱呱墮地到學懂叫「爸爸媽媽」之後，一般父母都會教導孩子數數。「一、二、三、四、……」就是這樣地數下去。我們將 1、2、3、4、……等數字合稱為「自然數」，正好反映這種自然而來的感覺。我估計，從來不會有父母教他們的孩子從 0 數起罷？因此，將 0 拒諸於自然數的門外，是合乎自然的。

當孩子進入小學，學會了十進位值記數法，又學會減法之後，0 的概念便會出現。進入中學之後，更學會負數。不過，在整個過程中，都將 0 歸類為一個特別的數字——它既不是正數，亦不是負數——無損我們對數學的學習和理解。事實上，在很久以前，課本上曾經出現過一個叫「完整數」（Whole Numbers）的概念，那就是將 0 與所有自然數放在一起的集合。如果我們所討論的問題，變數的取值範圍包括了 0，那麼我們可以用「完

[1] 黃毅英（2012）。追尋定義之路。《數學教育》33 期，3 – 11 頁。
張金魁、毛麗娜、李信巧（2012）。教師對幾何概念理解的調查研究。《數學教育》33 期，75 – 84 頁。

整數」這個名稱，避免混淆。例如：我們可以說，對於一切的完整數 n，以下的等式成立：$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$，其中 $r \neq 1$。

不講不知，生活在現代社會的孩子其實很幸福，他們可以從很多的途徑感受到 0 的存在。例如：從天氣報告，或者乘搭（某些）升降機時，他們便可以接觸到 0 這個概念。對他們來說，0 並非一件抽象的事物。但是，在古時，0 是一個十分難懂的概念，尤其是在歐洲，直到文藝復興的時期，人們對 0 仍然是十分抗拒的。原因非常簡單，對於古人來說，手握一塊石頭，就叫做「1」；兩塊就叫做「2」。而「0」則表示「沒有」,「沒有」根本不存在掌握之中，我們又怎能夠稱「沒有」為一個數字呢？因此，將 0 稱為「自然數」，那是多麼的不合理！

那麼，為何現在又會有人稱 0 是自然數呢？要回答這個問題，或者可以從集合論談起。

長話短說，當集合論在 19 世紀提出之後，數學家發現，基於某些原因，我們需要以集合論的語言對自然數寫出一個明確的定義。其中的一個方法，就是引入一個叫做「後繼集」（successor）的集合：如果 x 是一個集合，那麼它的後繼集就是 $x \cup \{ x \}$。這個定義初看十分嚇人，但如果大家明白集合的運算規則，細心地消化一下這定義，那麼亦不難明白它的意思。

假如現在有一個集合叫做 A，它裡面只有一個元素叫做 a，換言之，$A = \{ a \}$。那麼 A 的後繼集就是 $A \cup \{ A \} = \{ a \} \cup \{\{ a \}\} = \{ a, \{ a \}\}$ 了。留意：A 的後繼集一共有兩個元素：a 和 $\{ a \}$。不難證明，這個後繼集的後繼集將會有三個元素：a、$\{ a \}$ 和 $\{ a, \{ a \}\}$。

由此，我們可以反過來利用上述一連串的後繼集來定義自然數。即是說，我們將 1 定義為一個只有一個元素的集合，即前面提到的 A。由於 1 的後繼集有兩個元素，因此可以將 1 的後繼集定義為 2。2 的後繼集是 3，如此類推。從此，我們便可以利用純集合的語言，定義所有的自然數了。不過，問題來了：1 裡面有一個元素，但那個元素又是甚麼呢？

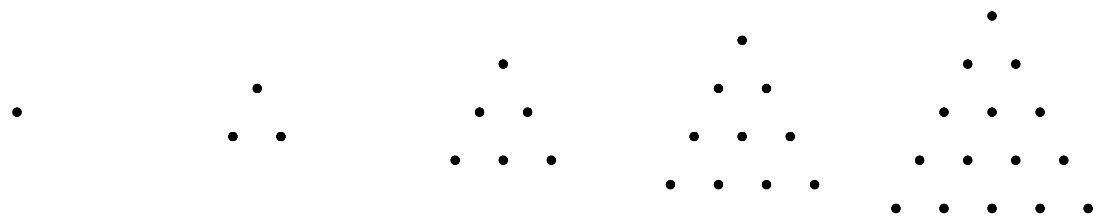
集合是一個抽象的概念，我們既觸不到亦摸不到。數學家為了要確保集合的存在，他們在研究集合論的初期，已經做了一個假設，就是假設這

個世界上最少存在一個集合。而一個順理成章的假設，就是假設那個集合是空集（empty set）：一個沒有任何元素的集合，並記之為 $\varnothing$。因此，如果我們問：「前面提及的集合 1 中，那個唯一的元素是甚麼？」那麼我們亦很自然地就會說它是 $\varnothing$，即 $1 = \{ \varnothing \}$。

不單如此，因為 $\varnothing \cup \{ \varnothing \} = \{ \varnothing \} = 1$，所以 1 亦是 $\varnothing$ 的後繼集。由此我們可以進一步定義 $0 = \varnothing$，並且令 0 成為所有自然數的起點。要知道，0 表示「沒有」，$\varnothing$ 亦是空無一物，將兩者等同，也是一件很合理和自然的事情。以此眼光來看，0 亦很自然地變成自然數的一分子了。

如果大家認為集合論實在太抽象，難以理解，那麼我亦有一個簡單的例子，解釋為何自然數可以從 0 開始。

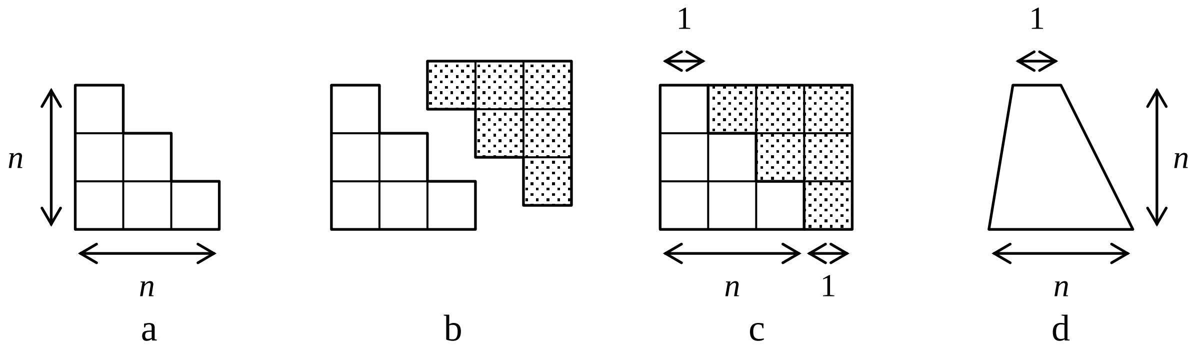
相信大家都知道，由於 1 , 3 , 6 , 10 , 15 , … 等自然數可以配對成三角形（見圖一），故此我們稱它們為「三角形數」。



1　　3　　6　　10　　15

圖一

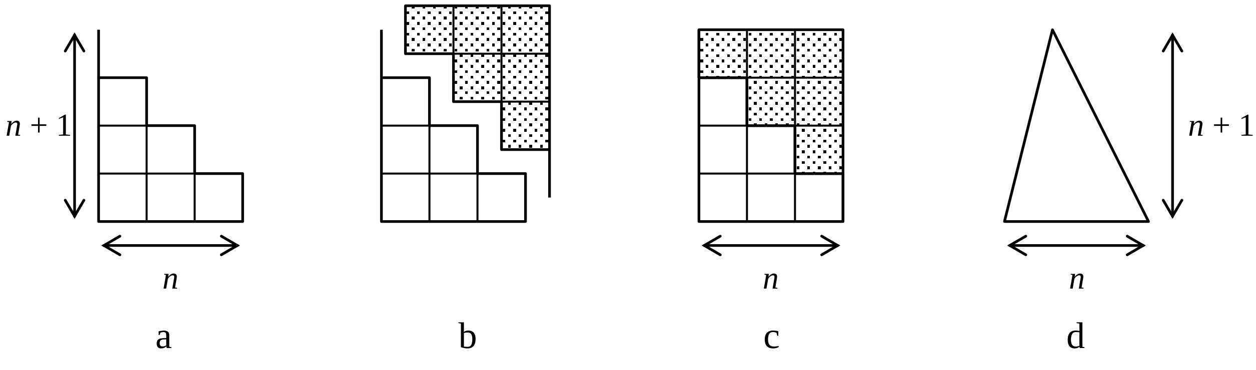
從觀察可知，第 n 個三角形數其實等於由 1 起首 n 個自然數之和，即第 n 個三角形數 $= 1 + 2 + 3 + \ldots + n$。不過，如果我們採用這個「原始定義」來計算三角形數，那麼計算量將會很巨大（試想想：第 100 個三角形等於多少呢？）。幸好，我們可以透過圖二所展示的步驟找到一個計算三角形數的簡單公式。



圖二

首先我們可以將三角形變成像圖二 a 般的樣子，然後將三角形複製成圖二 b，再將兩個三角形拼合成圖二 c 中的長方形。明顯地，長方形的高為 n，闊為 $1 + n$，故此長方形的面積為 $(1 + n) \times n$。又由於長方形的大小是原圖的兩倍，因此第 n 個三角形數 $= \dfrac{(1+n)\times n}{2}$。而這個公式又和計算如圖二 d 中，一個上底為 1、下底為 n、高為 n 的梯形面積公式相若。可是，問題來了：我們明明在計算三角形數，為何現在卻出現梯形面積公式呢？為何不是三角形面積公式呢？

或者可以轉一轉我們的目光，與其說三角形數是將自然數由 1 加起的和，不如將它視為由 0 加起，即三角形數 $= 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n$。留意這個改變對三角形數的數值是沒有影響的。不過，前面圖二 a 對三角形數的圖像表述便要改變成如圖三 a 般的模樣。採用類似的方法，我們不難發現，今次求得的和，可以用一個高 $n + 1$、底長 n 的三角形來理解（如圖三 d）。原來，只要從 0 開始，三角形數的計算公式，便會和三角形面積公式一樣！依此想法，我們將 0 定為第一個三角形數，也是非常合理的。也由此，我們可以稱 0 是第一個自然數！



圖三

由以上的例子可以知道，0 是否自然數，完全取決於我們用甚麼眼光來觀察一個數學問題，當然亦要留意我們對象的認知能力。如果我們面對著一群小學生，那麼 0 當然不是自然數。如果我們正在談論一些類似上述的數學問題，那麼將 0 設定為自然數，反而會帶來方便，為何不可？

問題二：正方形是否一個長方形？

每當遇到一些與幾何圖形定義有關的問題時，很多人都會立刻訴諸權威，例如：他們會拿出歐幾里得的《幾何原本》（Euclid's *Elements*）來查個究竟。可是，當他們找到《幾何原本》中的定義後，又會發覺當中的定義寫得非常古怪，難以令他們釋懷。

《幾何原本》第一卷第 22 個定義是這樣寫的：「在四邊形中，四邊相等並且四個角都是直角的，叫做正方形；角是直角，但四邊並不完全相等的，叫做長方形。[1]」如果我們緊隨《幾何原本》中的定義，那麼非常明顯，由於長方形的邊長並不完全相等，因此正方形不可能是長方形。

但是，如果我們完全接受了這個的定義，那麼以下的一道習題便會出現一個奇怪的答案：「$ABCD$ 為一長方形，周界為 32 cm，並設 $AB = x$ cm。求 x 的值使 $ABCD$ 的面積為極大。」大家不要以為這習題的答案為 8。事實上，當 $x = 8$ 時，$ABCD$ 會變成一個正方形，由於正方形不是長方形，因此這問題的答案應該是「無解」！

當然，以「無解」作為答案實在難以接受，因此如果我們希望上述問題有一個合乎情理的答案，那麼我們便要將正方形歸類為長方形的一種了。但接受了這個說法，又是否表示《幾何原本》的定義是錯的呢？

跟前面問題一的見解一樣，我認為判別正方形是否為一個長方形之前，我們必須先看看我們的對象。眾所周知，小孩子一般都思想單純、黑白分明，抗拒一些含糊其詞的描述。如果我們對一個小學生說：「一個正方形同時也是一個長方形」，那麼相信只會令他們感到極不舒服，無助於他們對有關圖形的理解。因此，在小學階段，我們將正方形與長方形區分，有利學生學習，亦可以配合他們的心智發展。可是，當學生升上中學之後，

---

[1] 藍紀正、朱恩寬譯（1992）。《歐幾里得．幾何原本》。台北：九章出版社（本書原本由陝西科學技術出版社於 1990 年出版）。第 2 頁。

正方形與長方形的界線便應變得模糊了。否則，前面提及過的極值問題，便沒有解答。至於《幾何原本》，極有可能歐幾里得在當年並沒有想過上述的極值問題，亦有可能他希望從最對稱、最簡單的圖形來建構他的幾何空間，因此便先引入正方形，然後才定義長方形，從而產生正方形不是長方形的結論。當然，先引入正方形，然後才到長方形，亦是一般小學生學習幾何圖形的進程。歐幾里得的寫法與一般小孩子的認知發展，是一致的。

事實上，《幾何原本》對正方形的定義並不精確。懂得一點初中幾何知識的學生都可以證明，一個四邊相等並且其中一個角是直角的四邊形，它其餘的三個角也都是直角。故此，《幾何原本》中「四個角都是直角」的要求，其實是過多的了。說也奇怪，歐幾里得在處理《幾何原本》中每一個命題的邏輯關係時，會盡量減少命題中假設條件的數量，但對圖形的定義，卻往往會出現一些從今天看是多餘的條件。

不過，我們不應責怪歐幾里得。現在我們能夠指出他的錯誤，純粹是因為數學家經過 2 千多年的努力後，知道了比歐幾里得更多的知識所致。這亦只不過反映出，我們可以通過不斷增長的數學知識來優化我們的數學定義，從而減少我們所需的數學假設，但這並不表示最初的「粗疏定義」是錯誤的，不可以用來教導學生。類似的知識發展歷程，其實亦出現在其他的學科之中。例如：愛因斯坦的相對論推翻了牛頓力學的一些假設，但我們絕對不可能對一個初學速度、時間、距離關係的小學生，直接教授愛因斯坦的理論罷？

我必須強調，沒有足夠的數學知識支持，只是單單追求一個最準確的定義，那是不合情理的。故此我不同意對一個初學幾何的小學生說：「在四邊形中，四邊相等並且其中一個角是直角的，叫做正方形。」亦不同意要一般的小學生接受「正方形是長方形的一種」這類說法。我們應該先從一個較粗疏的定義開始，讓學生學會了之後，再隨著他們年紀的增長，不斷優化那些定義。讓學生經歷定義轉變和優化的過程，是學生學習和成長的一個重要環節，亦是教學的一部分。一開始就對學生提供最嚴謹的定義，不單會嚇怕他們，亦會扼殺他們將來尋找和發現更佳定義的樂趣。

作者電郵：jckleung@netvigator.com