

## 教師對幾何概念理解的調查研究

張金魁<sup>1</sup>      新疆昌吉學院數學系  
毛麗娜<sup>2</sup>      新疆烏魯木齊市 93 小學  
李信巧<sup>3</sup>      廣西玉林師範學院

### 摘要

教師對於幾何概念理解的調查，反映了數學教育的理論水準和數學教育的現實狀況以及教科書的問題。從調查結果中得出有些教師不能夠準確記憶和理解概念和概念所表示的圖形，發現教科書在幾何圖形這部分內容的編寫中一些概念模糊，還有些概念所舉出的圖例不能充分反映概念的外延，導致不能夠完全理解並掌握概念和相應的圖形。針對這些問題我們建議教師在幾何概念教學時，應當深入的研究概念的內涵和外延，從學生角度出發，用便於學生理解與記憶的方法去講授。

### 引言

認識幾何圖形及其名稱是學習幾何的重要基礎，因此，幾何圖形的命名及定義方式，直接會影響學生對圖形的識別及其性質的理解。

受香港大學教育學院梁貫成老師關於《幾何圖形的名稱》研究報告的影響和啟發，並且徵得梁貫成老師的同意，採用了梁貫成老師的測試問卷《幾何圖形的名稱》（該問卷包括：識別圖像三個題目；描述概念一個題；說明概念一個題（刪除了此題的討論）。見附錄）。對 89 位教師進行了測試，並且對其中的 18 人進行了訪談，以便更深入地瞭解他們對於問卷概念的理解和認識。

我們之所以研究教師對幾何圖形的認知水準，是因為幾何圖形的名稱、概念是在初二以前出現的，教師對幾何圖形的認識除源自二三十年前教科書上學到的、老師教的，還有源自生活中積累的經驗，從而體現了知

---

1 張金魁：男，漢族，新疆，副教授，主要從事數學教學論研究。

2 毛麗娜：女，回族，新疆，主要從事小學數學教學。

3 李信巧：男，漢族，廣西，副教授，主要從事數學教學論研究。

識的不斷建構過程。因此，他們在問卷和訪談中出現的問題在很大程度上真實地反映了當時數學教育的理論水準和現實狀況。對這些問題深入研究、對症下藥，會對教科書的改革、教師的教學以及學生的學習起到積極作用，對知識的建構也起到重要作用。因此，我認為做這項研究是非常有意義的。

## 調查統計結果及其討論

### 1. 教師對幾何概念理解調查結果的統計

表一：幾何圖形概念理解的統計

選項	A	B	C	D	E
第一題	100.0	30.3	100.0	100.0	6.7
第二題	93.3	97.8	13.5	96.6	39.3
第三題	62.9	98.9	32.6	80.9	93.3

### 2. 教師對長方形概念理解的調查和訪談結果

#### 1) 調查結果

從表一中我們可以看出有近 70% 的教師認為正方形不是長方形，並且否定了 E 圖形，那麼什麼樣的圖形才是長方形？正方形是否是長方形？就這兩個問題我們對 18 位老師進行了訪談，並將訪談錄音形成文字。

#### 2) 訪談結果

訪談問題（1）什麼樣的圖形是長方形？

「對邊相等，四個角都是直角的四邊形是長方形。」 [2-T1]

（注：[2-T1] 表示第二位教師在第一個問題中的觀點，以下不予注明）

「兩組對邊平行且相等的四邊形是長方形。」 [1-T1]

「有一個角是直角的四邊形是長方形。」 [3-T1]、[5-T1]

「兩組對邊相等，但鄰邊不等，並且四個角都是直角的四邊形是長方形。」 [4-T1]

訪談問題（2）正方形是否是長方形呢？

「正方形是特殊的長方形。」 [2-T1]、[6-T1]、[9-T1]、[10-T1]

「正方形是鄰邊相等的，而長方形是鄰邊不等的。」 [5-T1]

「如果說沒有正方形定義出現的時候，我們可以認為 B 選項是長方形，但是我們都知道，在長方形之後還有正方形定義，所以我認為正方形不是長方形。」 [15-T1]

「我覺得正方形不是長方形，正方形和長方形屬並列概念，不存在從屬關係；四邊形是上位概念，它與正方形長方形是屬種關係，正方形、長方形、平行四邊形、梯形都是平行概念，也都是四邊形的下位概念。」 [11-T1]

### 3) 對調查和訪談結果的討論

對於長方形的定義，義務教育課程標準試驗教科書數學八年級下冊，課本是這樣定義的：「有一個角是直角的平行四邊形是矩形（rectangle）」。此外還有矩形的判定定理：「有三個角是直角的四邊形是矩形（長方形）」、「對角線相等的四邊形是矩形」。繼長方形的定義之後，19.2.3 節「正方形」的第一段內容是：「正方形（square）是我們所熟悉的幾何圖形，他的四條邊都相等，四個角都是直角。所以，正方形既是矩形，又是菱形，它既有矩形的性質，又有菱形的性質。」可見，正方形就是矩形（長方形）。大多數教師都能說出，長方形的四個角都是 90 度，並且對邊平行相等。有一部分教師認為正方形是特殊的長方形，另有一部分教師認為，正方形就是正方形，長方形就是長方形。可見，這些教師不能夠準確記憶幾何圖形的概念和圖形。那麼這些問題如果不及時去分析原因、去解決，將會影響學生對幾何概念的理解和記憶。

教材的編寫者怎樣把一個概念用精簡易懂的語言描述出來，並且按某種標準進行分類，來區別此概念與其他概念的異同和關係，這些都值得我們深入研究。本人查閱了有關簡單幾何圖形的概念，發現了一些特點。將簡單幾何圖形的概念按課本上出現的先後順序排列出來，這些概念的描述是循序漸進的，通常採用在一個已知概念的基礎上添加一至兩個條件得到一個新概念的方法（屬加種差的方法）。如：

小學課本：四邊形 → 平行四邊形 → 梯形

中學課本：四邊形 → 平行四邊形 → 特殊的平行四邊形  
(包括：矩形 → 菱形 → 正方形 → 梯形)

小學課本上在四邊形的定義上添加一個條件「兩組對邊分別平行」得到了平行四邊形的概念。在平行四邊形概念的基礎上再添加一個「只有一組對邊平行」得到梯形的概念。中學課本中，在四邊形的定義上加一個條件「兩組對邊分別平行」得到了平行四邊形的概念。在平行四邊形的基礎上再加一個條件「有一個角是直角」就得到矩形的概念。在平行四邊形的基礎上添加一個條件「有一組鄰邊相等」得到菱形的概念。從理論上講，正方形的概念可以在菱形的基礎上再加一個「有一個角是直角」就可以得到。但是課本上卻沒有這樣定義正方形，而是「正方形 (square) 是我們熟悉的幾何圖形，它的四條邊都相等，四個角都是直角，所以，正方形既是矩形又是菱形，它既有矩形的性質又有菱形的性質。」這個概念模稜兩可，它所表達的意思是正方形既可以是「特殊的菱形」，又可以是「特殊的矩形」。可見，教科書上正方形的概念不夠明確，學生在判斷正方形的時候很可能會犯和教師一樣的錯誤，因此這個概念的表述會影響到學生的理解和記憶。

### 3. 教師對梯形概念理解的調查和訪談結果

#### 1) 調查結果

從表一中我們可以看到：C 選項，教師中只有 13.5% 的人選擇了該選項，可以看出他們都否定了平行四邊形是梯形。E 選項，教師認為該圖形不是梯形。

大部分教師都能選出 A、B、D 答案，也就是說上窄下闊、上闊下窄以及圖形傾向一邊的都能辨別出。

#### 2) 訪談結果

訪談問題：(1) 怎麼樣的圖形是梯形呢？E 圖形是梯形嗎？

「只有一組對邊平行的四邊形是梯形。」 [3-T2]

「有且僅有一組對邊平行的四邊形是梯形。」 [15-T2]

「一組對邊平行，但不相等的四邊形就是梯形。」

[6-T2]、[9-T2]、[10-T2]、[11-T2]、[12-T2]、[13-T2]、[16-T2]

「E 不是梯形，因為兩個底角一個是鈍角，一個是銳角，所以就不是。」

[5-T2]

「E 看起來不像梯形，上下底看起來不平行。」

[10-T2]

### 3) 對調查和訪談結果的討論

義務教育課程標準試驗教科書數學八年級下冊在教科書，19.3「梯形」這一節中給出梯形的一個定義：「一組對邊平行，另一組對邊不平行的四邊形叫做梯形（trapezium）。」可見，大部分老師都能說出梯形的定義。但是值得我們注意的是「有一組對邊平行」和「僅有一組對邊平行」雖只差一個字，卻有著完全不同含義。

在訪談中有一位老師這樣回答：「準確定義記不清了，從形狀來解釋，像梯子一樣。」

[5-T2]

「《九章算術》的表述體系是按照由個別到一般的推導方式建立起來的。書中通常是先舉出某一社會生活領域中的一個或幾個個別問題，從中歸納出某一類問題的一般解法。」這是中國傳統數學的特點之一。它所表達的意思是：數學源於社會生活領域。因此，在定義一些幾何概念時，教科書上往往會舉出生活中的一些實例。如八年級下冊第十九章 19.3 梯形這一節課開始給了三幅圖例，有跳箱、梯子、水渠，這些都是學生生活中所熟悉的圖形。那麼，學生在回答梯形的概念時會不會脫口而出「梯形是像梯子一樣的圖形、梯形是像跳箱一樣的圖形、梯形是像水渠一樣的圖形」呢？

這位教師記不清楚梯形的準確定義，卻能記清楚梯形像梯子一樣。梯形的概念的確源於生活，但是事實證明，學生對生活實例的記憶要勝於概念的記憶。而我們教學所要達到的目的恰恰相反，是企圖讓學生記住圖形的準確定義，並且由定義聯想到圖形，聯想到實際生活中與概念相關的一些事物。

從 [5-T2]、[10-T2] 可知他們普遍認為：只有像 A、B、D 這樣的圖形，沒有出現過像 E 這樣兩個底角一個是鈍角另一個是銳角的梯形，通過查閱教科書，發現有些概念在教科書上所舉出的圖例不能充分反映所定義概念

的外延，而使學生不能夠完全理解並掌握概念和相應的圖形。就如，在梯形一題中出現的問題，課本中不曾出現過像 E 選項的圖例（如圖一）

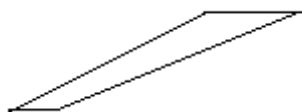


圖 一

該圖形，只有一組對邊平行，它滿足了梯形的概念，但是它的底角一個是鈍角，一個是銳角，教科書上就沒有圖例來明確這樣的圖形就是梯形。那麼，學生即使知道該圖形符合梯形定義也很難選擇正確，因為他們在教科書上學到的大多是上窄下闊的「大眾化」的梯形。因此，圖形和概念是相互影響、相互依存的。只有概念和圖形二者有機結合在一起，才能使教材更加完美，更重要的是，才能使學生更容易更深刻的理解與記憶。

#### 4. 教師對扇形概念理解的調查結果

##### 1) 調查結果

從表一中我們看到：對於 A 選項，教師中有近百分之四十的人認為半圓不是扇形。C 選項的百分比沒有過半，甚至很低。D 選項中扇形的圓心角大於 180 度，教師的準確率相對較高。E 選項，準確率也很高，也就是說當圓心角小於 90 度時他們都能夠選擇正確。

##### 2) 訪談結果

訪談問題：什麼樣的圖形是扇形？C 圖形是扇形嗎？

「圓的局部就是扇形。」「C 沒有中心，它只是圓的一部分。」 [1-T3]

「扇形是從圓心切圓，然後和圓的一段弧，組成的一個圖形。」「C 不是從圓心切的。」 [2-T3]

「圓的一部分就是扇形，並且圓心角要小於 180 度。」 [6-T3]

「扇形是圓的一部分，到圓心的距離相等。」「我認為扇形半徑是統一的，而 C 不滿足。」 [7-T3]、[10-T3]

##### 3) 對調查和訪談結果的討論

人民教育出版社出版的數學教科書（第十一冊）第四課「圓」的第三

個內容就是「扇形」。教科書上扇形的定義是：「一條弧和經過這條弧兩端的兩條半徑所圍成的圖形叫做扇形。圖中塗顏色的部分就是扇形。」(圖二)  
 (注意此定義如果僅要前一句，扇形的定義已經完備了，問題出在後面「圖中塗顏色的部分就是梯形」。這句話暗示了只有圓心角小於 180 度的是扇形)



圖 二

從定義上看，除了 C 選項，其他都是扇形。C 也是圓的一部分呀？關鍵在於它沒有「經過這條弧的兩條半徑」。而事實上 C 圖形是弓形，弓形：由弦及其所對的弧組成的圖形叫做弓形。

大部分教師都能提到圓心、圓心角、半徑、弧等構成扇形概念的條件，但是不全面。一部分教師認為 D 選項不是扇形，他們認為圓心角大於 180 度的，就不是扇形。

對扇形的調查中也出現過與梯形相類似的問題。如：在教科書中從未出現過圓心角大於 180 度的扇形，教科書中也未曾提到過半圓也是扇形。與此同時，教科書中還應介紹或定義弓形的概念。這在前面的討論中我們已經發現了教科書定義的缺陷。

由此可以得出，教科書對幾何概念的描述不僅需要精簡易懂的語言描述，而且更需要將符合概念的圖例一一呈現出來。以便教師從「數」和「形」兩個方面滲透概念，也便於學生理解和掌握。這不是繁瑣，事實證明學生在理解概念、認識圖形時需要這些圖例。

## 5. 教師對三角形概念理解的調查結果

### 1) 訪談結果

「三條邊圍成三個角的圖形是三角形，一、二定義都太局部了。」[1-T4]

「三條邊交叉構成三個內角，並且三個內角加起來為 180 度就是三角形。」 [4-T4]

「應該是由三條線構成三個內角的封閉圖形。」 [11-T4]

「如果選一，在一張紙上畫三條平行線段也不能算三角形，有三隻角也一樣的，如果他們不拼起來也成不了三角形。」 [5-T4]

## 2) 對訪談結果的討論

教科書上是這樣定義的：「由三條線段圍成的圖形（每相鄰兩條線段的端點相連）叫做三角形」「由不在同一條直線上的三條線段首尾順次相接所組成的圖形叫做三角形(triangle)。」從我們統計的資料中得知，有 28.1% 的教師選擇了「有三條邊的圖形是三角形。」有 65% 的教師都選擇了「有三隻角的圖形是三角形」。但從訪談中我們得知，一部分教師是受題目中括弧裏的「請圈選其一」要求的影響。一部分按字面意思理解「三個角的圖形」。

在訪談中有的教師認為兩個都不確切，如：「如果選一，在一張紙上畫三條平行線段也不能算三角形，有三隻角也一樣的，如果他們不拼起來也成不了三角形。」 [5-T4]

並且他們都舉出了反例。如圖三：

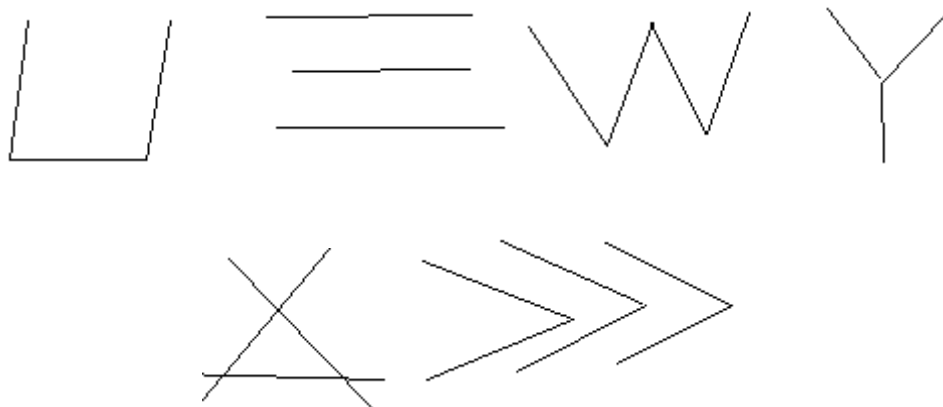


圖 三

## 結論

新課程改革的背景下，這項研究無疑給我們的教科書、教師的教學提出了更高的要求。鑒於這項研究所出現的種種問題，我們總結了以下幾點：  
(1) 教科書上的幾何概念的描述不但要精準，更要傾向於易於學生的理解與掌握。如：有些概念在教科書上所舉出的圖例不能充分反映概念的外延，



而使學生不能夠完全理解並掌握概念和相應的圖形（梯形與扇形都出現了此類問題）。圖形和概念是相互影響、相互依存的，只有概念和圖形兩者有機結合在一起，內涵和外延相互確切表述，才能使教材更加完美，更重要的是能夠讓學生更容易更深刻的理解和記憶。（2）教師在教幾何概念時應當深入的研究知識的內涵和外延，做好充分的準備，從學生角度出發，用便於學生理解與記憶的方法去講授。如：教師給學生師範的圖例要充分，要囊括概念外延所包含的全部圖例，盡可能將圖形按某一標準（邊、角）分類，幫助學生理解記憶概念和圖形，以及它們的對應關係。

### 參考文獻

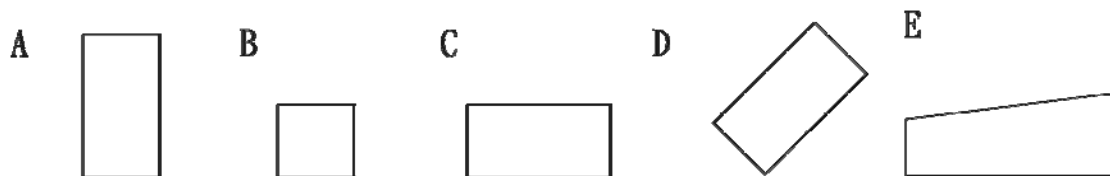
- 梁貫成（2008）。語言對學生學習數學的影響。北京師範大學學術報告電子簡報。
- 義務教育課程標準試驗教科書。（2004）。《數學·八年級·下冊》。人民教育出版社。
- 孔凡哲（2007）。《中國數學教育的傳統與發展：教科書視角》。北京師範大學學術。
- 《數學·三年級·下冊》。（2002）。人民教育出版社。
- 《數學·四年級·下冊》。（2002）。人民教育出版社。
- 義務教育課程標準試驗教科書（2003）。《數學·七年級·下冊》。人民教育出版社。

作者電郵：zyx1961@163.com

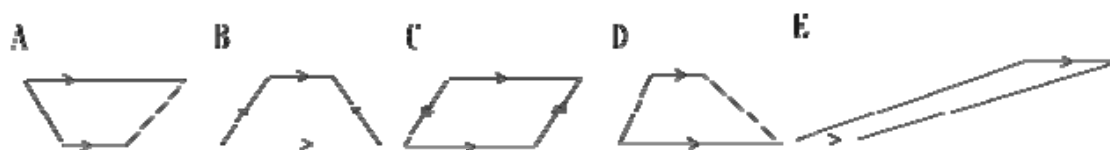
附錄

調查的問卷

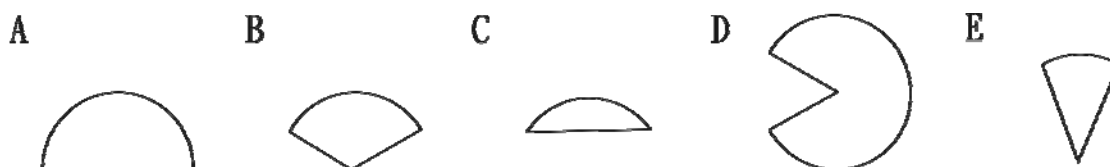
1. 下面的圖形中， 哪些是「長方形」？（請圈選所有適合的答案）



2. 下面的圖形中， 哪些是「梯形」？（請圈選所有適合的答案）



3. 下面的圖形中， 哪些是「扇形」？（請圈選所有適合的答案）



4. 下面哪句是對「三角形」較準確的定義？（請圈選其一）

- I. 「三角形」是有三條邊的圖形
- II. 「三角形」是有三隻角的圖形

5. 「等腰梯形」的定義是什麼？

「等腰梯形」是 \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_