

思維實驗——長方體展開圖教學設計之旅

汪滌塵

香港普通話研習社科技創意小學

馮振業

香港教育學院數學與資訊科技學系

黃美真

中華基督教會基法小學（油塘）

引言

前線教師於課堂上遇到的教學問題多不勝數，坊間為教師提供的教學設計未必能滿足每個課堂的需要。教師若要解決自己課堂中遇到的困難，必須轉變（用戶）角色，成為教學設計的開發者。弗賴登塔爾指出教師可以藉著一種思維實驗的手段發展數學教育。教師將自己或者教科書作者的設計，在內心教給學生。事先演繹他們可能出現的反應，然後將設計置於課堂測試、分析。最後，在分析結果的基礎上又開始新的設計與測試。教學發展的過程必須是研究與實踐的交替。（Freudenthal, 1991／劉、楊等譯，1999）

思維實驗分為兩個部分。第一部分，設計者從學生的眼光去面對所設計的教學活動，推測他們可能出現的反應，預測教學設計的成效與不足。第二部分則是將設計帶入課堂檢測，分析預測成功或失敗的原因，與此同時更真實、更深入地了解學生的需要，作為後續改良教學設計的依據。Streefland（1993）形容，思維實驗是設計者從學生角度出發，捕捉教學設計精準度的一種手段。交替的猜想與檢測，正是整個教學設計不斷修善的過程。德國學者 Wittmann（1984，1995，2001）也指出，數學教育研究的重要成果，應是一套套小心設計，建基於基本理論，並經充分實踐檢驗的教學單元。

數學化教學團隊，正是以這種思維實驗的手法設計和改良教學。歷年來，團隊針對數學教學普遍存在的難點，推出了不少成功可行的教學設計（馮，2010），受到教師們的歡迎。本文以長方體展開圖教學設計為例，介紹設計從誕生、受阻、改良、到最後步入成熟所經歷的思維實驗過程，為

教師們著手自行設計教學提供參考。

教學構想與理念

教育的發展來自變革的需要。培育學生的空間想像力是正方體及長方體展開圖的主要教學目的之一。然而，過往許多教師的經驗顯示，普通的教學設計只是安排學生將教材提供的紙樣摺回成立體，雖用了許多教學時間，但教學效果卻令人失望。學生只顧著摺紙而沒有思考平面圖形與立體圖形的關係，空間想像力並未得到很好的培育。空間想像力需要在動腦猜想和動手操作的反覆驗證中形成。因此，我們需要設計一些活動，令學生既動手、又動腦，讓思維不停地在平面圖形（紙樣）與立體圖形之間來回跳動，以達到訓練空間想像力的目的。葉嘉慧的正方體展開圖教學設計正是一個成功的教學方案（馮、葉，2004）。早前，幾位筆者在討論正方體展開圖的教學時，都想把教學延伸到另一個可以達致上述要求的探索題材——「長、闊、高不同的長方體展開圖數量的探究」。它在培育學生空間想像力之餘，更可以讓學生嘗試用動態的眼光看待平面和立體圖形。

長、闊、高不同的長方體的六個面，分別由 3 對不同的長方形構成。學生在探究長方體展開圖的數量時，除了要考慮六個面的哪些組合款式能摺成立體圖形外，還要考慮三對長方形的不同排列方法，實在複雜。然而，若能以一種動態的眼光看待長方體與正方體——將長方體看作是被調整了邊長的正方體，求長方體展開圖的數量便可有系統地完成，克服了數量大所帶來的困難。

這種眼光之下，任何長方體都可以通過調整長、闊、高的長度而回歸到正方體。反之，正方體亦可通過調整邊長，成為任一指定的長方體。它們的展開圖亦是如此。任一長方體展開圖透過調整邊長，都可回歸到我們熟悉的十一款正方體展開圖的其中之一。求長方體展開圖，只需求每一款正方體展開圖，對應多少種長方體展開圖便可。

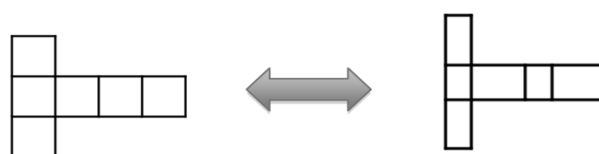


圖 一

解決這個問題，可先任意鎖定一款正方體展開圖中的一個正方形，對應長方體展開圖中三個不同的長方形 A、B、C，透過調整其邊長可得 6 種款式（三個不同的長方形橫放及縱放）。而一旦確定了展開圖其中一個面的擺放方式，剩餘的五個面便隨之確定，無第二種擺放可能。因此，每一個正方體展開圖最多可對應成 6 款長、闊、高不同的長方體展開圖。圖二以正方體展開圖的其中一款為例，其它十款可參考附錄一。

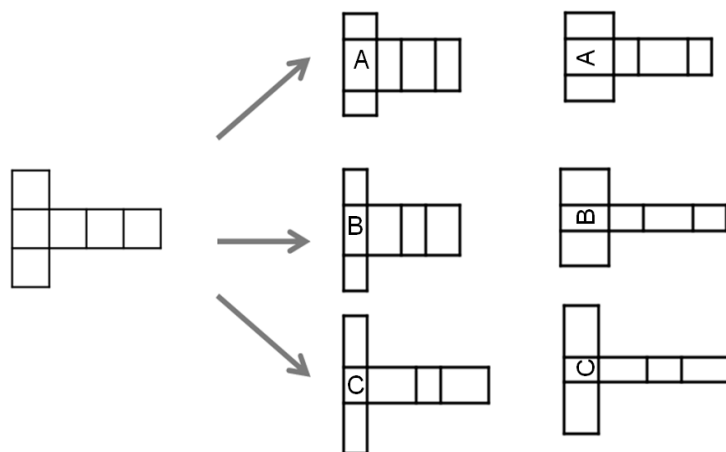


圖 二

至此，我們便可推測長方體展開圖最多可能有 66 款。接下來，則需要將十一款正方體展開圖一一驗證。驗證途中可發現：由於其中 4 款正方體展開圖具有旋轉對稱的性質，所對應的 6 款長方體展開圖中有 3 款重複出現（可見附錄一：四聯方 1-4、2-3，三聯方 3-0，二聯方）。因此，長、闊、高不同的長方體，總共有展開圖 $6 \times 7 + 3 \times 4 = 54$ 款。

此探究活動可以令學生有目標地研究長方體六個面的擺放位置，以及摺合成長方體時的各個面的拼合情況，並能發現正方體與長方體以及它們的展開圖之間的關係。這些內涵豐富的活動必能令學生在數學思想和空間思考能力上獲益良多。

失敗與改良

只要有變革的需要，思維實驗就會發生。（Freudenthal，1991／劉、楊等譯，1999）

以上解題的思路只是一種從成人角度出發的良好願望，要搬入課堂，則需進行思維實驗，將探索活動想像成從學生的眼前開始，猜想他們在老

師引導之下，可以怎樣將數學知識再創造出來。

剛開始進行思維實驗時，由於設計者對學生在該課題的表現了解較少，因此對學生行為的估計也較為粗疏。初次試驗，筆者們只是按照前文探究流程初步設計了一個教學框架。由於擔心學生在調整正方體展開圖各條邊長成長方體展開圖時，會因空間想像力不足而造成繪畫的困難，我們為學生提供了兩人一套的 A、B、C 三對長方形卡片（圖三：可組成一個長、闊、高不同的長方體），作為他們畫圖思考時的輔助工具。及至課堂後期，會鼓勵學生逐漸脫離它們，純粹在腦中構作圖形。

初次將教學設計搬入課堂實驗，大部分學生都能掌握探究的主脈絡，亦能接受以動態的眼光看待長方體和正方體。但在學生製作長方體展開圖多個活動中，學生表現的差異極大，顯示教學設計的不足。

設計者雖已預測到學生會存在空間想像力不足的困難，但仍不能掌握學生空間想像力的確實水平，結果只有部分能力較高的學生懂得使用所提供的長方形卡片。這些學生學會了探究思路之餘，更自行發現部分正方體展開圖對應的長方體展開圖，會出現重複的現象。然而，也有不少能力較弱的學生，在課堂後期還未掌握長方體展開圖的拼接條件。圖三就是他們的一種典型拼接錯誤：



圖 三

除了在拼接方面的困難外，教師在與學生討論如何窮盡十一款正方體展開圖所對應的所有長方體展開圖時，有部分學生儘管能夠聽懂老師講解的方法，但到他們自己做時，仍舊是漫無目的地亂拼一通。另一方面，學生比我們想像中的更依賴卡片，直到課堂結束時，大部分學生都未有信心直接在腦中操作。學生的表現是出乎意料的，但任何設計都必須經歷這樣的一個過程。只有在實踐中感受學生的學習困難，揣摩其形成的原因，捕捉他們的課堂需要，才能令設計帶出預期的效果。

經分析後，初次試驗的教學設計主要遇到了以下兩方面的阻礙。第一，學生之前利用正方形拼板拼砌正方體時，可以不受邊長的限制而任意擺放，以至後來從正方體展開圖過渡至長方體展開圖的探究時，未及察覺後者因邊長的轉變而帶來拼接的限制。第二，在拼接長方體展開圖上存在的困難，直接影響部分學生在活動時，無暇思考窮盡所有展開圖的方法。因此，在活動總結時，學生難以與教師產生共鳴。

為了解決以上問題，課堂的步伐必須調慢一些。在進行探究長方體展開圖的數量之前，我們添加了一個準備活動——學生透過隨意拼砌找出多款長、闊、高不同的長方體展開圖，目的是訓練學生拼砌和繪畫長方體展開圖的能力。老師將展開圖與立體本身互相對應後，再通過示範，讓學生清楚長方體展開圖中六個長方形間的拼接條件。接著讓學生兩人一組實際操作和互相檢驗。掌握了拼砌長方體展開圖的基本能力，再進行展開圖數量的探究，學生則有餘力進行高層次的思維活動了。

初次試驗遇到的困難，令我們體會到凡需要進行高層次的空間關係討論前，我們必須讓學生先具備較具體的活動經驗或感受。只有這樣，才能幫助學生較容易參與思考和討論。我們還留意到，在討論具有旋轉對稱的正方體展開圖只有三款對應的長方體展開圖之前，也應該先讓所有學生都有以下發現：把對應同一款正方體展開圖的六款長方體展開圖旋轉半圈後，可看到部分長方體展開圖有重複的可能。我們由對應六款長方體展開圖開始，先引導學生推測是否全部的正方體展開圖都可對應 6 款長方體展開圖，然後教師假裝隨意地選擇一款具有旋轉對稱性質的正方體展開圖，讓學生調整邊長得出所有長方體展開圖，並發現 6 款展開圖中有重複的情況，再透過討論，探究其中的原因。這樣處理，不但令學生印象深刻，更可訓練他們的思考能力。這樣的有針對性的、由淺入深的探究活動，可令學生如同爬樓梯一般，一步一個階段地穩步前進。而課堂差異也能得到縮小和控制。

課堂實驗的過程一方面驗證了設計者之前的猜想是否合理，而實驗後的分析也幫助教師反思自己的教學行為。思維實驗，有助培養設計者（教師）對學生的觸覺，提高其教學執行能力和分析能力。之後再遇到類似的教學問題，教師對學生反應的掌握便會更準確。（馮，2010；汪，2011）

骨架方案改良後，課堂效率就成為前線教師的關注點。一方面，課堂教學時間非常寶貴。另一方面，我們需要盡量減少干擾課堂的不必要元素，以令學生能夠簡單直接地思考課堂最主要的部分。因此，我們在一些細節上下了功夫，將那些無關學生數學思考、解題技能培養等方面的要求放到最低。具體如下：

1. 改良教具。老師在展示時，教具的使用力圖簡單、快速、清晰。我們放大了七套長方形卡片，並於背面貼上軟磁鐵，以供教師貼在黑板上操作、演示。
2. 改良學具。我們按照老師所要求的尺寸在卡片上添加網格，使學生將長方體、卡片、繪畫圖形三者對應（圖四、圖五），以減少學生繪畫長方形的困擾。

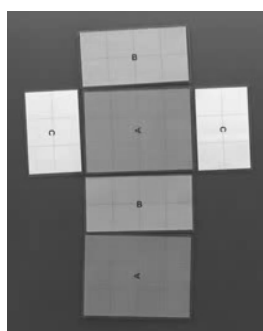


圖 四

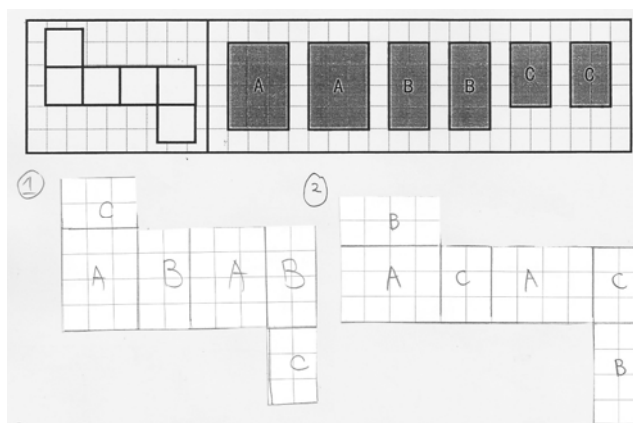


圖 五

3. 要求學生為長方體展開圖的每一個長方形標號，方便在課堂上溝通。
4. 凡遇到對應同一款的正方體展開圖的不同的長方體展開圖，要求學生的擺放方向一致，方便師生判斷有否重複，減少不必要的時間浪費。
5. 以正方體展開圖的經驗來看，學生對展開圖的檢驗（是否成立？有否重複？）直接影響課堂進行速度的快慢。長方體展開圖的數量比正方體展開圖的數量多，圖形也更複雜，因此學生的檢驗必須做得很好才能夠保證教學能在預計時間中完成。我們要求學生在方格紙上先畫好長方體展開圖，然後剪下來由另一個同學驗證和檢查，再

貼在工作紙上，有了這樣的步驟，學生犯重複或不成立的錯誤機會就少了很多，課堂效率也自然會提高一些。

6. 減少學生與老師溝通的困難，更仔細斟酌關鍵語言，令問題更直接地呈現在學生面前。

上述有關教學設計的每一個決定，都是經過反覆斟酌而得出的。設計者們的一些想法，剛開始時也未能肯定是否真的有效。例如，在討論細節 4 時，筆者們也曾擔心拼、畫、剪、驗、貼的過程步驟太多、操作複雜，學生難以應付。因此，我們找了年齡相若的孩子加以實驗，以此推測想法是否適用於課堂操作。

再試驗改良後的劇本

經過第一輪實驗的分析後，重新佈置的教學設計，是從學生的角度出發而更改的，因此更能貼近學生的需要。其後我們在另一所學校進行了第二輪實驗。這次教學，由於有了細緻的佈局，課堂的發展、學生的反應基本都在我們的預料中進行，教學成效得到很大的提高。

課堂剛開始，教師引導學生著重觀察長方體三對不同的面在拼接時需要注意的事項，通過分析反例的方式，讓學生思考長方體展開圖中各長方形間的拼接條件。觀察所見，學生在準備活動（活動一：找出不同的長方體展開圖）中，長方形邊與邊的拼接錯誤甚少出現。此外，學生在一邊盡可能找出更多的長方體展開圖的同時，一邊已對長方體展開圖與正方體展開圖之間的關係有了更進一步的瞭解。很多學生已留意到對應同一款正方體展開圖，簡單變化三種長方形的排列方式，便會產生新的一款長方體展開圖。這些經驗，無疑為後續尋找長方體展開圖的數量奠定了基礎。

掌握繪畫長方體展開圖的技巧後，學生在活動二（窮盡同一款正方體展開圖對應的所有長方體展開圖）中的表現就更出色了。許多學生在找出了第六款長方體展開圖後便自行停下，且肯定沒有第七款出現。有學生在課堂中解釋：

「(此款正方體展開圖)中間的四連方，最多可調整成以下六種不同的長方形排列方式。且因為確定了中間四連方所拼砌的長方形種類，剩下的兩個位置肯定沒有其他選擇。因此此款正方體展開圖最多可對應六款

不同的長方體展開圖。」(如圖六)

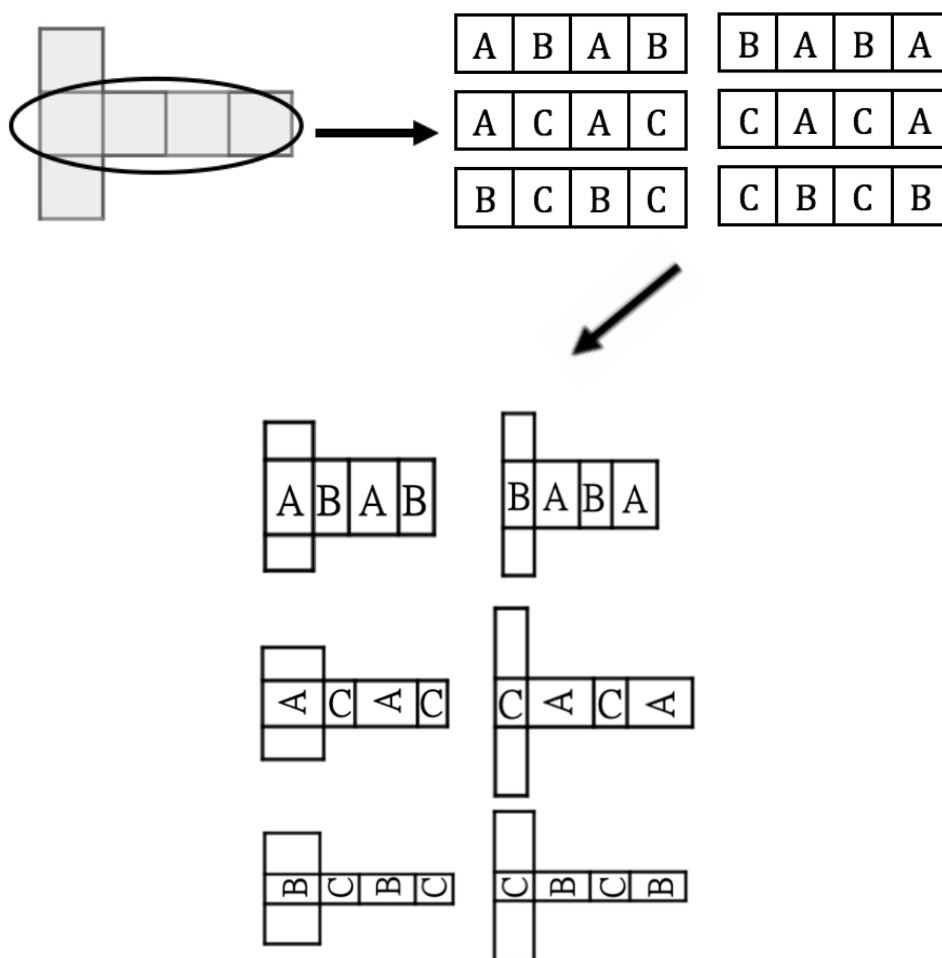


圖 六

簡單來說，學生們發現了此款正方體展開圖中的四連方，調整邊長後將成為長方體的四個側面，即是兩對間隔排列的長方形，窮盡三種長方形的排列方式，共可得六款對應的長方體展開圖。這個方法與前文所提到的「鎖定其中一塊」的技巧，本質上是一樣的。不少同學在之後的活動都運用這種方法，一邊做一邊嘴裡念著字母組合，窮盡所有款式。結果顯示，全班有近四分之三的學生能夠找齊教師所要求的長方體展開圖。可見學生在活動中的關注點已從「如何拼砌長方體展開圖」轉移到「如何窮盡長方體展開圖」這個更高層次的問題之上。更令教師欣喜的是，隨著活動的進行，使用長方形卡片輔助思考的學生人數也逐漸減少，課堂最後有多過三分之二的學生能純粹在腦中構作長方體展開圖。

以上跡象表明改良後的教學設計成功可行。反思原因，改良後的教學

流程具備以下特點：

- 一. 針對難點，建立學生自己操作的實踐經驗後，才進行高層次的討論；
- 二. 待學生都差不多知曉探究的奧秘後，才將解難的關鍵引爆，有效地照顧學習差異；
- 三. 將重點更為直接和明顯地呈現在學生面前，令大部份學生有切身經驗和體會。

課後，教師請學生回家自行探究有兩個面是正方形的長方體展開圖的數量。學生積極作答，不少學生回答正確，且思路清晰（詳見附錄二）。可見學生的空間想像力，以及總體的數學解難能力，都有所提高。

從只有一個大概的框架入手，經過改良，最後形成較為成熟的設計，這整個過程實非容易。在這個長方體展開圖數量探究的教學設計旅途中，三位筆者不停地進行思維實驗，憑藉對學生的觸覺及經驗推測每個教學行為對課堂發展的影響，經過前後不下十次地反覆更改才最終成形。正因為如此仔細地佈置，才能令這些思維品質、能力背景各不相同的孩子，都能順著課堂發展的軌跡穩步前進。

參考文獻

- 馮振業（2010）。共濟的鱗片：十二載數學化教學的省思。《數學教育》30期，15-26。
- 弗賴登塔爾（Freudenthal, H.）著（1999）。《數學教育再探》（*Revisiting mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 劉意竹、楊剛等譯。）上海：上海教育出版社。（原作1991年出版）
- 馮振業、葉嘉慧（2004）。數學化教學：空間觀念的培養。載鄧幹明、黃家樂、李文生、莫雅慈（編）。《香港數學教育會議—2004 論文集》（頁89-96）。香港大學教育學院。（後收入吳丹（編）（2007）。《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》（頁188-199）。香港：香港數學教育學會。）
- 汪滌塵（2011）。數學化教學的實現與現實。載黃家樂、李玉潔、潘維凱（編）。《香港數學教育會議2011 論文集》（頁64-49）。香港：香港數學教育學會。
- Streefland, L. (1993). The Design of A Mathematics Course: A Theoretical Reflection. *Educational Studies in Mathematics* 25(1-2), 109-135. (reprinted in L. Streefland (ed.), *The legacy of Hans Freudenthal*, 1993, (pp.109-135). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.)

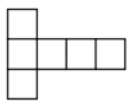
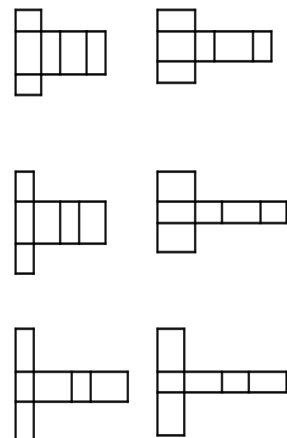
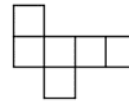
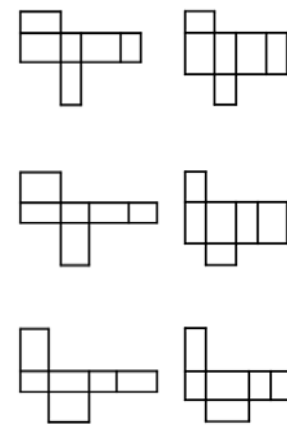
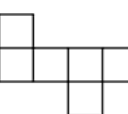
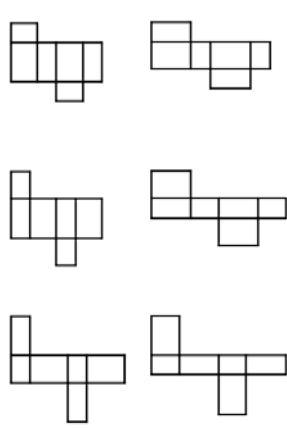
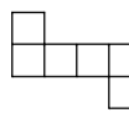
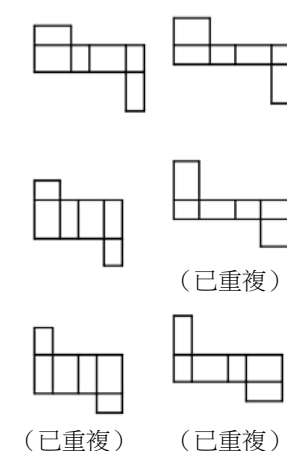
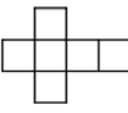
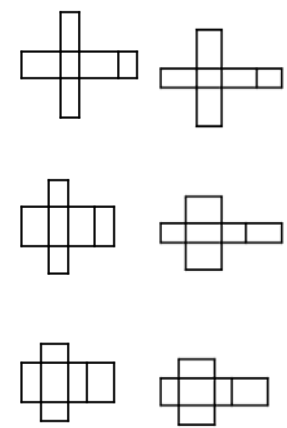
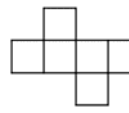
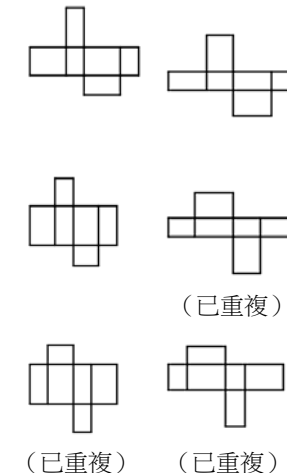
Wittmann, E. Ch. (1984). Teaching units as the integrating core of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 15(1), 25-36.

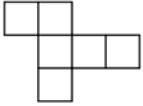
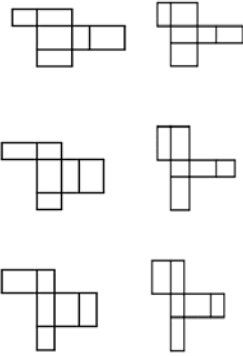
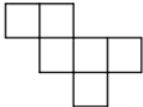
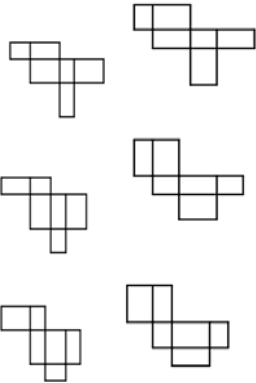
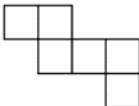
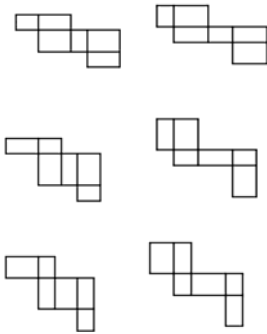
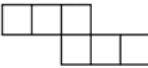
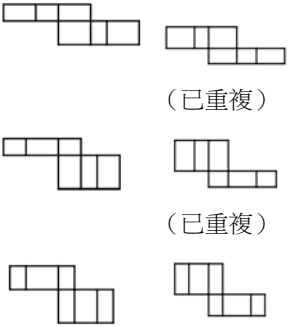
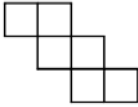
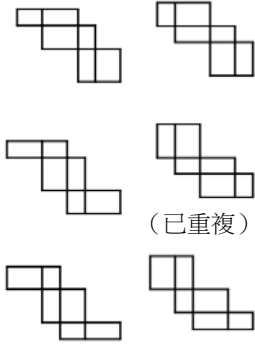
Wittmann, E. Ch. (1995). Mathematics education as a 'Design Science'. *Educational Studies in Mathematics* 29(4), 355-374. (reprinted in A. Sierpiska, and J. Kilpatrick (eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity, vol. 1*, 1998, (pp.87-106). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.)

Wittmann, E. Ch. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics* 48(1), 1-20.

首作者電郵： dichen.wang@gmail.com

附錄一 正方體展開圖對應長方體展開圖

正方體展開圖	對應長方體展開圖	正方體展開圖	對應長方體展開圖
 <p>四聯方 1-1</p>		 <p>四聯方 1-2</p>	
 <p>四聯方 1-3</p>		 <p>四聯方 1-4</p>	
 <p>四聯方 2-2</p>		 <p>四聯方 2-3</p>	

 <p>三聯方 2-1</p>		 <p>三聯方 2-2</p>	
 <p>三聯方 2-3</p>		 <p>三聯方 3-0</p>	 <p>(已重複) (已重複) (已重複)</p>
 <p>二聯方</p>	 <p>(已重複) (已重複)</p>		

附錄二：探究有兩個面是正方形的長方體展開圖數量(學生佳作)

一個長方體是由 4 個相同的長方形和 2 個相同的正方形圍成，
它有多少個不同的長方體展開圖？

我的思路：
 上一次找到共有 54 個長方體展開圖，分別有 7 種正方形展開圖各能
 對應 6 款長方體展開圖；有 4 種正方形展開圖各能對應 3 款長方體展開圖。根
 據以上資料，結果如下：

① 可對應 6 款展開圖的正方形展開圖每個能對應 3 個題目所述的長方體的展開圖。∴共有 7 種
 ∴有展開圖：7 × 3 = 21 (個)

② 可對應 3 款展開圖的正方形展開圖每個能對應 2 個題目所述的長方體的展開圖。∴共有 4 種
 ∴有展開圖：4 × 2 = 8 (個)

③ 共有題目所述的長方體的展開圖：21 + 8 = 29 (個)

答案：29 (個)

一個長方體是由 4 個相同的長方形和 2 個相同的正方形圍成，
它有多少個不同的長方體展開圖？

我的思路：

No.1 (3個) No.2 (3個) No.3 (2個)

縮小版

上述有 10 款可以對應到 3 款，其中有 3 款對應到 3 款，其中一個例子，如四種方體，同一個四種的一、四做列，畫有別樣樣式計算。如此類推之。

對應到 3 個的有 7 款，對應到 2 個的有 4 款

$$3 \times 7 + 2 \times 4$$

$$= 21 + 8$$

$$= 29 (款)$$

答案：29 (款)