追尋定義之路[1]

黃毅英
香港中文大學課程與教學學系

定義與教學

近年大家都追求數學教學內容背後的數學原理，這自然是一件好事。以往教數學，以中小學教科書為例（當然附加數及中六數學除外），不少概念都沒有列出定義的。這也未必是一件值得驚嚇之事，因為眾所周知，清清楚楚知道了定義並不表示明白了其中的概念，「做數」（問題解決）亦不是光靠明白定義就能完成[2]。

無論如何，在老師層面而言，知道定義總比不知道好。近年亦有一種風尚是查問各教學概念的「準確」定義，這可能與事事追求標準化的氣候有關，這包括用字、用語、甚至讀音標準化之訴求[3]。這麼多年來收到相關的查詢絡繹不絕。於是從幾年前開始，與一班本港及內地的朋友，嘗試草擬一本關於各中小學數學教學內容背後一種數學解釋的小書[4]。在合寫過程中，涉及不少有趣的討論。於此抽出幾點與大家分享。

何謂自然數？

事緣數年前內地教育部《數學課程漂準》突然把「0」定作自然數，引起小學數學教育界一些不安。余榮燊先生（本港資深小學數學教育工作者）

---

1 本文得張家麟及張僑平兩位博士的寶貴意見，謹此致謝。

2 張家麟、黃毅英（2010）。《從「微積分簡介」看數學觀與數學教學觀》。香港：課程發展處數學教育組。

3 黃毅英（2011）。第四份香港數學教育另類報告—對香港數學教育發展的願景。載黃家樂、李玉潔、潘維凱（編）。《香港數學教育會議— 2011 論文集：香港數學教育—後教改時期的反思》（頁 43 – 49）。香港：香港數學教育學會。

黃毅英（2011）。漫談（數學）教學語言。《數學教育期刊》45 期，23 – 30。

4 暫名為《數學教師不怕給學生難到了！——中小學數學教師所需的數學知識》，繁體版擬交課程發展處數學教育組出版（數學百子櫃），簡體版則擬交華中師範大學出版社出版。

著急的與我聯絡，希望我作出澄清（0 不應是自然數）。我一直覺得 0 是否自然數不是什麼關乎宏旨的事情（反正我們從小學，甚至直至中六，都不會強調「自然數」這個名稱）。找了一些資料，寫了兩文[5]，於此不贅。

然而自然數是甚麼呢？在中小學範圍可能不必定義，自然數就是很自然的嘛。所以早期「直觀論者」稱之為「原始直觀」。於是有 L. Kronecker（1823 – 1891）「上帝創造自然數，其他一切都是人工的」[6]的名言（後來亦有不少關於自然物和人造物的討論）。最常出現的情況是當學生問，數學歸納法原理如何得以證明，其中一個合理的答案可能是，這是自然數的性質，不需要證明。若果知道皮亞諾（G. Peano, 1858 – 1932）公理的讀者就會知道數學歸納法是皮亞諾的第五條公理，既是公理就不需要證明了！

這可不是故事的完結，與張奠宙教授（華東師範大學數學系教授）亦有過這樣的討論。他指出，用皮亞諾公理定義自然數是最恰當不過了。當然我贊同。這也是最通行的定義，亦是內地大學數學系的普遍做法（不過據查香港的大學數學系基本上已不教授自然數的定義了——可見沒有定義也沒大不了！）。但你若翻一翻梁鑑添與郭麗珠博士的《初等集合論》[7]第二冊，皮亞諾公理卻變成了定理（頁 78 – 79），因為該書是按馮‧諾曼（J. von Neumann: 1903 – 1957）等人把數學建基於集合的基本思想鋪陳。簡言之，定義 $0 = \phi$，$1 = \{ \phi \}$，$2 = \{ \phi , \{ \phi \} \}$，…，$n^+ = n \cup \{ n \}$。還用非常嚴謹的方法證明如此的定義是存在的，如此這般地建立了 **N** 後，數學歸納法也就變成定理了。

這裡不想走進當中的技術細節，話說回頭，縱然馮‧諾曼時間上可以說是皮亞諾的更新版本，故此好像理應遵從（取代了皮亞諾），但眾所周知，馮‧諾曼等人當時有著歷史的需要，堵塞第三次數學危機出現的漏洞

---

5 黃毅英（2005）。自然數的歷史。《朗文教育專訊》8 期，6 – 9。

黃毅英（2005）。從教學上的考慮「0」。《朗文教育專訊》8 期，10 – 11。

6 “Die Ganzen Zahlen had Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk”。英譯：“God made integers, all else is the work of man”

7 Leung, K. T., Chen, D. L. C. (1967). Elementary set theory. Hong Kong: Hong Kong University Press.

而作出此等定義[8]。在今天一般數學工作者也許就把問題交給了這些人（集合論專家或專研數學基礎的數學家），知道他們已經把漏洞堵塞了就安心繼續用一些慣常的方式去做數學了。故此，究竟數學家最認同的「標準」定義是皮亞諾的還是馮・諾曼的呢？或者也許這根本不是一個關心點。

至於「終極定義」的追求，數學上還有所謂「等價定義」。即兩命題 A、B 等價，我們可選 A 作定義，那麼 B 是可由 A 推出的定理。我們也可選 B 作定義，A 則變成了定理。

Tchebycheff 多項式便是一例。它可定義作 $T_n(x)=\cos(n\,arc\cos x)$ 並可推出它適合 $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$（1982 年高考純數科題目），但又可用 $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$ 作定義（當然要加上起始條件），$T_n(x)=\cos(n\,arc\cos x)$ 就變成了結論（1985 年高考純數科題目）[9]。

伍鴻熙教授（加洲大學柏克萊分校數學教授）也曾提過[10]，雖然我們可以利用 SAS 推出 SSS 及 ASA，但其實我們三個都可假定為起點，然後推出餘下的兩個。

分數運算

在小書的編寫過程中，其中一位內地作者把分數加法定義為

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad \text{———— ①},$$

這與香港的習慣有些不同。

我們一般先談擴分（包含約分），於是同分母分數可以相加，而異分母分數相加就可以透過擴分完成。而

8 黃毅英（2007）。三次數學危機──個人認知與體會。《中學數學教學研究》。2/2007，7 – 10。又見 Ebbinghaus, H.-D., Hermes, H., Hirzebruch, F., Koecher, M., Mainzer, K., Neukirch, J., Prestel, A., & Remmert, R. (Ed.) (1995). Graduate texts in mathematics 123: Numbers (2nd edition). New York: Springer.

9 黃毅英（1996）。評核、擬題與數學教育。《數學傳播》80 期，33 – 49。後載黃毅英（編）（1997）。《邁向大眾數學之數學教育》（頁 153 – 184）。台北：九章出版社。

10 Wu, H. (1996). The role of Euclidean geometry in high school. Journal of Mathematical Behavior, 15, 221 – 237.

$$\frac{a}{b}=\frac{na}{nb} \qquad (b，n\neq 0) \text{ ——— ②}$$

及

$$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d}$$

一般透過圖像或實際情境解說。但想深一層，如何對以上作算術證明（我無意說算術證明是必須的，或凌駕圖像解說）也許殊不容易。故此 Landau[11] 等人又是為了歷史的原故索性把

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$$

定義作

$$\frac{ad+bc}{bd}$$

（又見 Leung & Chan，1967，頁 89）。確切地說

$\mathbf{Q}=\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}'/\sim$，其中 $\mathbf{Z}'=\mathbf{Z}\setminus\{0\}$，$\sim$ 為等價關係

$$(a , b) \sim (c , d) \text{ 當 } ad = bc$$

（故同時已得出 ②）而

$$(a , b) + (c , d) \text{ 就定義作 } (ad + bc , bd)$$

或更確切地，

$$(a , b)/\sim + (c , d)/\sim = (ad + bc , bd)/\sim$$

（當然以上皆有 $b，d\neq 0$）。故此，把 ① 當成定義不是沒有道理的。

其實分數已開始有一點人造物的意味。仍記得有一年與黃家鳴先生（香港中文大學的同事）一起與數學教育學士同學分享他們的實習，提到分數除法，黃先生提出了一個反思點：現時大家都把包含除法和等分除法都分

11 *Grundlagen der Analysis* (E. Landau, 1877 – 1936)

得清清楚楚，但何以它們同是除法呢？他當然不是指二者都有著同一的名稱，而是他們有著（數學）本質上的共通。

又試想想，Landau 等人，雖然為了歷史原因要這樣「人工化」（人造物嘛！）地定義有理數的運算，但顯然他們的定義亦是配合慣常做法和整數運算法則（即 ① 仍適用於整數），而不可能無中生有地另起爐灶。由 **R** 擴張到 **C** 亦如是，我們希望 **R** 的運算法則平穩過渡到 **C**，$a + bi$ 就可以看做二項式（把 i 當作文字）一般操弄。除了其他種種在物理上、圖像上的原因外，複數的四則只可能有一種定義方法。即是下面的方式：

$$(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2} \qquad （c，d \text{ 不同時為 } 0）$$

這既是定義，也可能是一種結論，因為不太可能（除非把整個運算法則倒亂了）有其他定義方式[12]。

a^0（其他如 a^{-n}，$n \in \mathbf{Z}^+$）等亦有類似情況。至於分數乘除，談的人已很多了，不想在此重覆。

故此伍鴻熙指出「我們可以畫很多圖來解釋【分數運算】，但對除法來說，無論怎樣去解釋，歸根究底都是對上述方程

$$（指 \ \frac{c}{d} \times (?) = \frac{a}{b}）$$

的求解；所以倒不如老老實實地用這個方法來定義。因為除法本身就是一個抽象的概念，故此最好從這個方法入手。在這情形下，解方程是唯一方法。」（頁 30）[13]

12 Fung, C. I., Siu, M. K., Wong, K. M., & Wong, N. Y. (1998). A dialogue on the teaching of complex numbers and beyond. *Mathematics Teaching, 164*, 26-31.

13 伍鴻熙（1999）。《小學數學教育研究工作坊》。香港：香港科技大學教育發展組。

$0.\dot{9}=1$

這恐怕是一個問得最多的問題，答的人也很多。我們這裡不說如何向學生解說讓他們接受，只想問數學上為何 $0.\dot{9}=1$。以往我較側重它是極限的縮寫，即「 $0.\dot{9}=1$ 」其實代表了

$$\lim_{n\to\infty} 0.\underbrace{9...9}_{n}=1 \text{ 。}$$

這隱含著「1」是一個數， $0.\dot{9}$ 本來不是一個數，是一個數列的極限，而這極限剛好就是 1。這個說法也許沒有大錯，但其實不夠完整[14]。

我們可以進一步問什麼是實數？最直觀的當然是一截數綫的長度。這牽涉了一連串事件：由第一次到第三次數學危機，從數學「幾何化」（畢達歌拉斯「萬物皆數」重視算術量，第一次數學危機後轉移到幾何量）到數學（分析）的「算術化」運動，於此不贅[15]。簡言之，若不滿足於用幾何量定義實數，用 Landau（及前人）的方法，到有理數就行人止步。到戴德金（J. Dedekind，1831 – 1916：戴德金分割）及康托（G. Cantor，1845 – 1918：康托套區間）把實數以算術方式建立起來。粗略地說，每一個實數（包括有理及無理數）本身都可看成是有理數數列的極限，每一個數都可以用一個數列來代表。張奠宙教授[16]也提到，「 $0.\dot{9}=1$ 」實指兩個數列的相等或兩個等價類相等。事實上，有理數數列的極限和實數是一而二、二而一的事。

幾何定義

至於幾何方面的定義，我們一般會參考《原本》。但和不同數學領域的情況一樣，《原本》是在當時獨特歷史背景下的產物，它有著堵塞第一

---

14 黃毅英（2006）。「老師，用『A 簿』還是用『B 簿』？」。《數學教育》23 期，27 – 36。

黃毅英（2007）。教學隨筆：500 是奇數，501 是偶數！。《數學教育》24 期，31 – 33。

15 胡作玄（1985）。《第三次數學危機》。成都：四川人民出版社。

黃毅英（2007）。三次數學危機—個人認知與體會。《中學數學教學研究》。2/2007，7 – 10。

16 張奠宙（2009）。《小學數學研究》。北京：高等教育出版社。

次數學危機中種種漏洞的這個特殊歷史任務，故此我們不一定需要把它看成是天條，雖然《原本》仍有不可取代的地位和參考價值。

例如有學生問，「點沒有大小，為什麼由點構成的線具有長度？」若細看《原本》，它並沒有說過線是由點所構成。《原本》中相關的定義有：

※ 點是沒有部分的。

※ 線有長度沒有寬度。

※ 線的界限是點。

※ 面只有長度和寬度。

※ 面的界限是線。

《原本》處理這些問題時十分小心，它從沒說過點累積後會變成為線[17]。因為直線（所謂「連續統」continuum）是否有縫隙正是第三次（甚至上溯至第一次）數學危機的核心問題，而這要到 21 世紀初才基本上解決。

$\triangle ABC \cong \triangle ACB$？

$\triangle ABC$ 是否與 $\triangle ACB$ 全等，這亦是一個常見提問。這問題源於當 $AB = PQ$，$BC = QR$，$CA = RP$ 時，學生寫 $\triangle ABC \cong \triangle PRQ$（不是 PQR）算不算錯。按對應的順序書寫當然是個好習慣。但有些學生把 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PQR$（或 $\triangle PRQ$）看成整塊三角形，就像寫 $\triangle X \cong \triangle Y$ 一樣，故此在思維上學生未必完全錯誤，這些都談過了[18]。現時就事而探問在數學而言，$\triangle ABC$ 是否與 $\triangle ACB$ 全等？

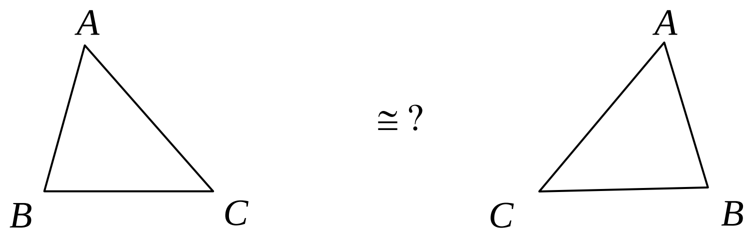

圖　一

17　黃毅英、許世紅（2009）。數學教學內容知識：結構特徵與研發舉例。《數學教育學報》。18 卷 1 期，5 – 9。

18　黃毅英（1996）。$\triangle ABC \cong \triangle BCA$？《數學教育》2期，22 – 24。

當然這又涉及何謂「在數學而言」了。有趣的是《原本》中其實沒有為全等（或相似）三角形下定義的（歐幾里得太高招了！——也許他刻意迴避這問題：天曉得？），例如關於 SSS 的命題 8，它只是說「如果兩個三角形的一個有兩邊分別等於另一個的兩邊，並且一個的底等於另一個的底，則夾在等邊中間的角也相等」。

所以，如果我們要為「≅」下定義，我們就要自己決定究竟它包含些什麼理念（shape 相等和 size 相等？orientation 要不要相等？……）來定出你想要的定義了。

怎麼樣的數學？

以上只是舉出一些在這許多年來我所接觸到的事例。我無意把事情推到極端。在一般的情況下，數學的定義仍是相當統一的。不過以上的事例卻都啟發了我不少思考。我不想把上面的看成為一些結論或對這些問題的標準答案，尤其當中不少問題，我自己仍不斷在探索中，我只想帶出我們可以多角度考慮問題。

※ 學生建立數學的過程

※ 一般人的直觀數學

※ 不同歷史階段的數學（mathematics-in-its-making）[19]

※ 現時「公認」的數學（mathematics-as-an-end-product）

※ 不同數學工作者（代數學家、分析學家、集合論者）按其需要的不同數學定義

有著微細的不同，但同時又起著巧妙的交織作用（正如上面所說，Landau 等人對分數加法的「古怪」定義也是基於慣常做法而製訂的）。我們不必（亦也許不可能）只事事尋找權威定義一錘定音。

19 Siu, F. K., & Siu, M. K. (1979). History of mathematics and its relation to mathematical education. *International journal of mathematics education for science and technology, 10*(4), 561 – 567.

張奠宙先生提出在一段時期，數學教育有「去數學化」的趨勢[20]，即只著重一般的教育學（包括學習心理學和教學法等）。於是人們開始談數學課要教得數學化一點，這是理所當然的（但其實又不必丟掉學習心理學和教學法！）。但這多多少少隱含著一種假設：存在著一個統一的數學終點，我們最終走到一種「標準」的數學來。上面的討論正正反映事實未必如此。

愈來愈多的討論指出，諸如電腦環境中的數學、圖像表徵的數學、「傳統」的「主流」數學、動手數學……其本質有著大同中的小異（所以 Ernest[21] 說數學的本質是 quasi-experimental！）。而若大家再細看 Freudenthal 關於數學化的文章[22]，我們的數學課應希望學生得到的，除了數學知識內容外（教學要數學多一點），還包含著由具體到抽象、從周遭經驗到內化成自身（各人可以不同——建構主義嘛！）數學概念與思維方法的能力，不是嗎[23]？

作者電郵： nywong@cuhk.edu.hk

---

20 張奠宙（2009）。《我親歷的數學教育（1938 – 2008），第 44 節：對數學教學中“去數學化”的批評》（頁 160 – 164）。南京：江蘇教育出版社。

21 Ernest, P. (Ed.) (1991). *The philosophy of mathematics education*. Hamsphire: The Falmer Press.

22 Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education (China lectures)*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

23 黃毅英（2007）。數學化過程與數學理解。《數學教育》25 期，2 – 18。