教室剪影：課堂在意外中收穫精彩

周斌
浙江省岱山縣東沙中學

課堂教學是教師與學生思維交流的主陣地，教師面對的是思想活躍以及知識基礎、認知方式等不盡相同的學生，不同的學生對問題的認識程度是極不相同的。儘管備課是經過精心準備的，但突發性的事件還是經常發生，適應瞬息變化的思維也正是一個優秀教師所必須具備的素質之一。而且，課堂上學生這些意外、鮮活的問題也恰恰給課堂教學注入了無限的生機！教師應該成為學生的幫助者，鼓勵學生大膽提問，尊重學生的想法，這樣的課堂才因為意外而無限精彩。

以下是本人碰到的一個案例，願與同仁分享。

問題源起（高一年级）

在一堂“等差數列的性質”複習課中，當講到在等差數列$\{a_n\}$中，若 $p+r=2q$, 則有 $a_p+a_r=2a_q$ 這一性質後，突然一個學生提了令我意想不到的問題：“老師，基於條件 $p+r=2q$ 不變，對於 $a_p^\alpha+a_r^\alpha$與 $2a_q^\alpha$之間有什麼關係？他表示對於$\alpha=2$ 他已證明 $a_p^2+a_r^2\geq 2a_q^2$，但不能確定 $a_p^\alpha+a_r^\alpha\geq 2a_q^\alpha$是否一定成立？”。語驚四座，我也沒想過這個問題，一時沒有答案，另外一個學生接著站起來說：「老師，這個問題需作一些限制，如 $\alpha=\frac{1}{2}$，那麼需$\{a_n\}$每項為正數才能討論 $a_p^\alpha+a_r^\alpha$ 與 $2a_q^\alpha$ 之間的關係。」一石激起千層浪，由於學生的意外提問，打亂了我的教學預設，學生的求知欲，積極性頓時被這樣的問題調動起來。經過大家的討論，我索性讓同學們探究起這個問題：設$\{a_n\}$為正項等差數列，公差 $d\geq 0$，若 $p+r=2q$ 探究 $a_p^\alpha+a_r^\alpha$ 與 $2a_q^\alpha$ 之間有什麼關係？

問題探究

顯然，對於一般化的這個問題，學生解決起來有點困難。於是我先讓學生探究第一位同學提出 $\alpha=2$ 的情形。很快，他們便證明瞭 $a_p^2+a_r^2\geq 2a_q^2$。

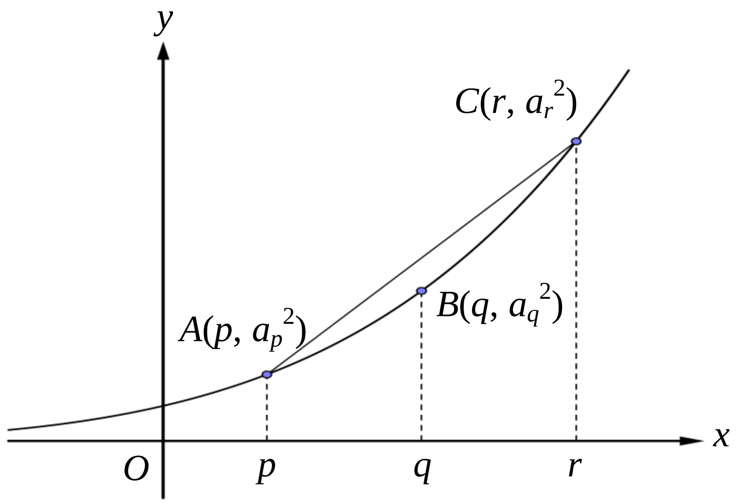
證明　作差比較，　$a_p^2 + a_r^2 - 2a_q^2$

$$= a_p^2 + a_r^2 - 2\left(\frac{a_p + a_r}{2}\right)^2$$

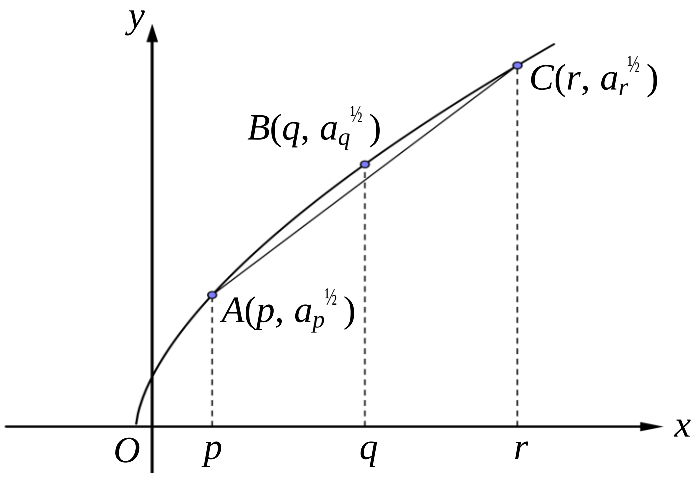
$$= \left(\frac{a_p - a_r}{2}\right)^2 \geq 0\text{，故 } a_p^2 + a_r^2 \geq 2a_q^2\text{。}$$

等號成立的條件是 $d = 0$。

此時，對於給定幾個 α 的特殊的值，同學們已獲得問題解決的方法。如對於 $\alpha = \frac{1}{2}$，同學們運用類似方法證明得出了以下結論：$a_p^{\frac{1}{2}} + a_r^{\frac{1}{2}} \leq 2a_q^{\frac{1}{2}}$；如 $\alpha = -2$，有 $a_p^{-2} + a_r^{-2} \geq 2a_q^{-2}$。顯然，$a_p^{\alpha} + a_r^{\alpha}$ 與 $2a_q^{\alpha}$ 的大小關係與α的取值有關。那麼，此問題的本質是什麼呢？於是，我進一步引導學生：數列是定義在正整數集上的函數，那麼能否從函數的角度來看待這個問題呢？經過深入思考後，部分學生已能從函數圖像上來認識這個問題：因為 $\{a_n\}$ 為正項等差數列，公差 $d \geq 0$，可設 $a_n = kn + b \geq 0$，$k \geq 0$，對於 $\alpha = 2$，點 $A\,(p, a_p^2)$，$B\,(q, a_q^2)$，$C\,(r, a_r^2)$ 位於 $f(n) = (kn + b)^2$ 的圖像上，借助於計算機用幾何畫板畫出圖像，



此函數圖像是向下「凸」的，從圖像上顯然有 $a_p^2 + a_r^2 \geq 2a_q^2$；同樣的，對於 $\alpha = \frac{1}{2}$，點 $A\,(p, a_p^{½}), B\,(q, a_q^{½}), C\,(r, a_r^{½})$ 位於 $f(n) = (kn + b)^{½}$ 的圖像上，此函數圖像是向上「凸」的，



故有 $a_p^{\frac{1}{2}} + a_r^{\frac{1}{2}} \le 2a_q^{\frac{1}{2}}$。至此，通過這個意外問題的探究，學生獲得了如下結論：設$\{a_n\}$為正項等差數列，公差 $d \ge 0$，若 $p + r = 2q$，當 $\alpha \in (0, 1)$ 時，有 $a_p^{\alpha} + a_r^{\alpha} \le 2a_q^{\alpha}$；當 $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$時，有 $a_p^{\alpha} + a_r^{\alpha} \ge 2a_q^{\alpha}$。雖然由於證明需用到高等數學函數的凹凸性等知識的限制，學生不能證明此結論，但他們不難藉函數的圖像從直觀上理解這個結論，而且在這個意外問題而引出的探究活動，不但使學生從知識層面，包括對等差數列性質、基本不等式的運用，得到了鞏固和加強，更重要的是圍繞問題本質的揭示，使學生從探求知識聯繫的過程到觀察分析，歸納類比，數形結合，對問題中蘊含的數學方法和數學思想進行不斷地思考，讓學生體會到數學思考帶來的樂趣和成就感，這些才是最深層次的。

問題鏈結

例 1（2006 復旦大學自主招生試題）已知等差數列$\{a_n\}$中，$a_n > 0$，公差 $d \ge 0$，求證：$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \ldots + \frac{1}{a_{2n-1}^2} \ge \frac{2n-1}{a_n^2}$

對於此題，若知道上述結論，證明過程就變得十分簡易。即先證明若 $p + r = 2q$, $\frac{1}{a_p^2} + \frac{1}{a_r^2} \ge \frac{2}{a_q^2}$，即上題中 $\alpha = -2$。

證明　設 $p + r = 2q$，因為 $a_q^2(a_p^2 + a_r^2) = \left(\frac{a_p + a_r}{2}\right)^2 \times (a_p^2 + a_r^2)$，

$$\left(\frac{a_p + a_r}{2}\right)^2 \ge \left(\sqrt{a_p a_r}\right)^2, \quad a_p^2 + a_r^2 \ge 2a_p a_r$$

$\therefore \quad a_q^2(a_p^2 + a_r^2) \geq \left(\sqrt{a_p a_r}\right)^2 \times 2a_p a_r = 2a_p^2 a_r^2$

$\therefore \quad \dfrac{a_p^2 + a_r^2}{a_p^2 a_r^2} \geq \dfrac{2}{a_q^2}$，即$\dfrac{1}{a_p^2} + \dfrac{1}{a_r^2} \geq \dfrac{2}{a_q^2}$

$\therefore \quad \dfrac{1}{a_1^2} + \dfrac{1}{a_{2n-1}^2} \geq \dfrac{2}{a_n^2}$，$\dfrac{1}{a_2^2} + \dfrac{1}{a_{2n-2}^2} \geq \dfrac{2}{a_n^2}$，…，$\dfrac{1}{a_{n-1}^2} + \dfrac{1}{a_{n+1}^2} \geq \dfrac{2}{a_n^2}$，

將各式相加得，$\dfrac{1}{a_1^2} + \dfrac{1}{a_2^2} + \ldots + \dfrac{1}{a_{n-1}^2} + \dfrac{1}{a_{n+1}^2} + \cdots + \dfrac{1}{a_{2n-1}^2} \geq \dfrac{2(n-1)}{a_n^2}$

$\therefore \quad \dfrac{1}{a_1^2} + \dfrac{1}{a_2^2} + \ldots + \dfrac{1}{a_{n-1}^2} + \dfrac{1}{a_n^2} + \dfrac{1}{a_{n+1}^2} + \cdots + \dfrac{1}{a_{2n-1}^2} \geq \dfrac{2(n-1)}{a_n^2}$

用如出一轍的方法可解決下例：

例 2（2008 上海交通大學自主招生試題）已知等差數列$\{a_n\}$中，$a_n > 0$，公差 $d > 0$，求證：$\sum_{i=1}^{2n+1} \sqrt{a_i} < (2n+1)\sqrt{a_{n+1}}$

問題反思

在課堂上，我們經常會遇到學生提出一些意外提問，這些可能會打亂教師預定的教學設計，但這些問題背後也可能蘊含無限精彩。教師是要把學生的提問一帶而過，按照預定的模式走？還是沿著學生的問題探究下去，和學生一起探究下去？我想答案不言而喻，課堂主陣地應該還給學生，學生是「演員」，要讓每個學生演出不同的角色，提出自己不同觀點，教師是「導演」，適時的關注學生的數學水準，關注每個學生的活動變化和最近發展，由學生的需求而產生的探究，無論在知識的獲取、情感的體驗、還是思維能力的培養都勝似甚至勝過教師精心設計的課，本節課也充分說明課堂完全可以成為探究性學習的陣地，這也是新課程提倡的教學理念。

作者電郵:zhoubin1027@yeah.net