分數和小數互化定理的推廣之三

武海蓬、王劍
山東師範大學數學科學學院

首先考察定理的十進制版本。

定理　若 $0 < a < b$，$(a , b) = 1$, 且 $b = 2^{\alpha}5^{\beta}b_0$ （α、β是非負整數），$(b_0 , 10) = 1$，$b_0 > 1$，則：

① 當$\alpha \ge \beta$時，$\dfrac{a}{b} = 0.a_1\, a_2\ldots a_\alpha\dot{a}_{\alpha+1}a_{\alpha+2}\ldots\dot{a}_{\alpha+h}$；

② 當$\alpha \le \beta$時, $\dfrac{a}{b} = 0.a_1\, a_2\ldots a_\beta\dot{a}_{\beta+1}a_{\beta+2}\ldots\dot{a}_{\beta+h}$；

其中 h 是滿足 $10^h \equiv 1 \pmod{b_0}$ 的最小正整數。

考慮一般的 n 進制情形，便得到下面的定理。

定理　若 $0 < a < b$，$(a , b) = 1$，$n_1n_2 \ldots n_5$是 n 的所有互異質因數，$b = n_1^{\alpha_1}n_2^{\alpha_2}\cdots n_s^{\alpha_s}b_0$ （α_i是非負整數），$(b_0 , n) = 1$，$b_0 > 1$，則：

$\dfrac{a}{b} = 0.a_1\, a_2\ldots a_\alpha\dot{a}_{\alpha+1}a_{\alpha+2}\ldots\dot{a}_{\alpha+h}$，其中 $\alpha = \max\{\alpha_i\}$，$i = 1, 2, \ldots, s$，$h$ 是滿足 $n^h \equiv 1 \pmod{b_0}$ 的最小正整數。

證明　令 $\alpha = \max\{\alpha_i\}$，$i = 1, 2, \ldots, s$，則

$$\frac{a}{b}\cdot n^{\alpha} = \frac{an^{\alpha}}{n_1^{\alpha_1}\cdots n_s^{\alpha_s}b_0} = \frac{a}{b_0}\cdot n_1^{\alpha-\alpha_1}n_2^{\alpha-\alpha_2}\cdots n_s^{\alpha-\alpha_s}\text{。} \tag{1}$$

令$t = n_1^{\alpha-\alpha_1}n_2^{\alpha-\alpha_2}\cdots n_s^{\alpha-\alpha_s}$，又由 $(a, b) = 1$， $(b_0 , n) = 1$，可分別得 $(a, b_0) = 1$，$(t, b_0) = 1$；於是 $(at, b_0) = 1$。

[1] 若 $at < b_0$，根據參考文獻 1 和 2 的定理可得：$\dfrac{at}{b_0} = 0.\dot{c}_1 c_2 \ldots \dot{c}_\alpha$，

再由 (1) 得 $\dfrac{a}{b} = 0.a_1\, a_2 \ldots a_\alpha \dot{a}_{\alpha+1} a_{\alpha+2} \ldots \dot{a}_{\alpha+h}$，其中 $a_1 = a_2 = \ldots = a_\alpha = 0$，$a_{\alpha+1} = c_1$，…，$a_{\alpha+h} = c_h$。

[2] 若 $at > b_0$，作帶餘除法得 $at = b_0 q + a_0$。 (2)

其中 $0 < a_0 < b_0$，$(a_0 , b_0) = 1$，於是 $\dfrac{a_0}{b_0} = 0.\dot{d}_1 d_2 \ldots \dot{d}_\alpha$。 (3)

由 (1) 和 (2) 得 $\dfrac{a}{b} \cdot n^\alpha = q + \dfrac{a_0}{b_0}$，其中 $1 \le q \le n^\alpha$。 (4)

再由 (3) 和 (4) 可得：$\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{n^\alpha}(q + \dfrac{a_0}{b_0}) = 0.a_1\, a_2 \ldots a_\alpha \dot{a}_{\alpha+1} a_{\alpha+2} \ldots \dot{a}_{\alpha+h}$，其中 $a_{\alpha+1} = d_1$，…，$a_{\alpha+h} = d_h$，證畢。

參考文獻

1. 王劍、呂蓮俊（2007）。分數和小數互化定理的推廣。《數學教育》，24，頁 61–62。
2. 王劍、胡錫娥（2007）。分數和小數互化定理的推廣。《數學教育》，25，頁 88–89。

作者電郵： 7676dyj@sina.com。