

# 平方數的快速計算

顧先明

唐山師範學院數學與資訊科學系

## 引言

快速計算是一種優秀的科學素質，它在很多人的眼中也許是很神秘的，但事實上它是可以人工培訓的，你只要掌握技巧也能靈活自如的應用，經常使用的話，人還可以變得越來越聰明。張景斌（2000）闡述了中學生的心理特點：他們具有可塑性大，上進心強，求知慾旺盛，精力充沛，腦神經反應敏捷，思維趨向於邏輯性，興趣向廣泛而深入，思維發展正處於形象思維向抽象思維過渡的階段等特點。我們可以針對初中學生心理素質和接受能力的特點，在初一的數學教學中可以有意識地培訓學生這種快速計算的能力，培養良好的速算意識，使他們體會到快速計算的樂趣，進而增強他們學習數學的興趣和促進數學技能的形成，這對於我們的教學工作十分有益。

我們常常會很驚訝為什麼有人能一口氣說出某些二位數的平方，而不需要任何工具（算盤、袖珍計算器、電腦）都不用，甚至連紙和筆都不需要？說到這裏完全可以把廣大初中生的好奇心充分調動起來了，從而更有興趣地接受這種快速計算方法的培養，促進學習成績的提高，讓學生受到數學美的薰陶。

## 主要內容

在這裏，我們主要研究 1 – 100 以內的自然數的平方數的計算問題。事實上，對於某些自然數區間來說，有些心算法能非常快速而有效地報出它的平方數。我們先把 1 – 100 之內的自然數分為四段：(1) 1 – 20 之間的數的平方數；(2) 21 – 30 之間的自然數；(3) 31 – 70 之間的自然數；(4) 71 – 100 之間的自然數。再分別對每個區間段選取相應的「基準數」，在每一個區間段內超出對應的基準數的自然數叫做「盈餘數」，不足相應的基準數的自然數叫做「虧損數」，下面我來分別闡述各區間段的數的平方數的快速計算的方法：

(1) 對於 1 – 20 之間的自然數，計算它們的平方數：史維海（2000）研究了 1 – 20 之間的自然數的平方數計算問題，給出了具體的速算方法。筆者對其作進一步補充說明如下：①對於 1 – 10 之間的自然數的平方計算問題，我們可以根據經典的「小九九乘法口訣」，那是張口就來的，即：一一得一，二二得四，三三見九，四四一十六，五五二十五，六六三十六，七七四十九，八八六十四，九九八十一；②對於 11 – 20 之間的自然數的平方數的計算，筆者認為可以這樣進行：先將原數的個位數做自乘積，作為得數的個位（該進位的要進位），然後再將原數與原數的個位相加之和，作為得數的前幾位，最後把兩次計算結果的數字「串聯」相加起來，即為所求的結果。（但是串聯時應注意：若第一步的計算結果是一個個位數，那麼直接和第二步的計算結果的數字串聯相加；若第一步的結果是一個兩位數，串聯相加時把這個兩位數的十位數字與第二步的計算結果的個位數字相加，該進位的要進位。），如算  $12^2$ ，先算  $2 \times 2 = 4$ ，再算  $12 + 2 = 14$ ，然後在串聯相加得  $12^2 = 144$ ；再如算  $17^2$ ，先算  $7 \times 7 = 49$ ，再算  $17 + 7 = 24$ ，最後把兩次計算結果串聯相加，這是要把 49 中的 4 與 24 中的 4 相加，得到所求結果  $17^2 = 289$ 。

(2) 對於 21 – 30 之間的自然數的平方數計算問題，這時選取基準數為 30，再進行操作。如算  $27^2$ ，此時相比於基準數(30)會有虧損數(-3)，那麼加上 15 之後得出 12，然後再乘以 6 以後可得到 72，最後在其後串聯加上那個虧損數(-3)的平方 9，很快算出結果是 729，它就是 27 的平方了。據說這種情形下的快速計算竅門是被倫塞勒綜合工藝學院的詹姆斯-麥克基弗特教授發現的。其實我們深入研究可以發現這兩個演算法的竅門（即數學原理）就在於：

$$(30 \pm x)^2 = 900 \pm 60 + x^2 = (15 \pm x) \times 60 + x^2 \quad (I)$$

這裏的  $x$  即為與基準數(30)相比的盈餘數(或虧損數)，用 60 乘以  $(15 \pm x)$ ，意味著在積的個位上保留出空位，正好給表示為一位數的  $x^2$  來填充的，當然也不排斥  $x^2$  是兩位元數的情況，操作方式：若盈餘數（或虧損數）的平方是兩位數，這時候要把兩個得數串聯相加時，可能要“越位”到前面來了，例如，在算  $24^2$  時，要在  $15 + (-6) = 9$  再乘以 6，即相應地得到 54 和 36，而這個 3 就必須與前面的 4 相加，最後得到 576。

(3) 對於 31 – 70 之間的數：首先研究 40 – 60 之間的數的平方，對於  $55^2$  而言，此時的盈餘數是 5，加上 25 之後以後可得出 30，再在其後面串聯上 5 的平方，於是加上得出 3025，它就是 55 的平方了。

類似地，再來求 47 的平方，此時有  $15 + (-3) = 22$ ，而  $(-3)^2 = 9$ ，從而立即得到 2209。

若盈餘數（或虧損數）的平方只有一位數，則要在前面添個 0，以湊足二位，例如，在計算  $52^2$  時，要在  $25 + 2 = 27$  的後面添寫 04，便得 2704。實際上這種演算法是基於下麵的數學原理：

$$(50 \pm y)^2 = 2500 \pm 100y + y^2 = (25 \pm y) \times 100 + y^2 \quad (\text{II})$$

這裏的  $y$  為與基準數 50 相比的盈餘數（或虧損數），用 100 乘以  $(25 \pm y)$ ，意味著在積的十位與個位上保留出空位，正好給表示為二位數的  $y^2$  來填充的。

但是，實際上在這個方法裏並沒有排斥  $y > 10$  的情況，明顯地，這時  $x^2$  將不止二位，我們在計算操作時，要對上述的方法進行一下「微調」：這時候要把兩個得數串聯相加時，可能要「越位」到前面來了，例如，對於  $66^2$  來說，將有  $25 + 16 = 41$ ，後面在填寫  $16^2 = 256$ ，即相應地得到 41 和 256，而這個 2 就必須與前面的 1 相加，最後得到 4356。當然只要應用熟練之後，操作起來依然覺得很方便。

基於(1)中所述的結論，可以把這種操作方法推廣到快速計算 31 – 69 之間的自然數的平方數，那麼因為當  $a$  是 31 – 69 之間的任意自然數時，那  $a$  在與基準數 50 相比的盈餘數（或虧損數）都不會超過 20，而對於 20 以下的自然數的平方，我們在(1)中已經討論了。如計算  $69^2$ ：將有  $25 + 19 = 44$ ，後面在填寫  $19^2 = 361$ ，即相應地得到 44 和 361，而這個 3 就必須與前面的 4 相加，最後得到 4761。

(4) 最後對於 71 – 99 之間的自然數的平方，我們該怎麼辦呢？實際上已經不能按照上面所述的演算法了，那樣計算起來太麻煩了。

筆者先解決 91 – 99 之間的自然數的平方計算問題，選取基準數 100，可以這樣進行計算：從原數中減去「虧損數」（與基準數 100 相比而言），

然後再串聯加上虧損數的自乘積，若虧損數的自乘積是個位數，則要在中間補個 0，即可得所求結果。如算  $92^2$ ，先算  $92 - 8 = 84$ ，再算  $8^2 = 64$ ，最後串聯相加得到  $92^2 = 8464$ ，再如算  $98^2$ ，先算  $98 - 2 = 96$ ，然後  $2^2 = 4$ ，最後串聯相加得到  $98^2 = 9604$ 。（實際上此演算法亦可用來計算 81 - 89 之間自然數的平方數，但是由於與「基準數」100 相比，得到的「虧損數」將是一個兩位數，這樣的話，還需要計算這個兩位數的平方，也不太快捷。）

對於 71 - 89 之間的自然數的平方計算問題，筆者研究發現可按如下方法進行：將原數加上它的個位數字，並拿原數減去它的個位數字，再把兩個計算結果相乘取積，且加上原數的個位數的自乘積，最後把兩個積相加即可得到所要求的平方數。

$$\text{例如算} \quad (73)^2 = (73 - 3) \times (73 + 3) + 3^2 = 5329$$

$$\text{再如算} \quad (86)^2 = (86 - 6) \times (86 + 6) + 6^2 = 7396$$

至此，我們完整地解決了 1 - 100 之內的數的平方的快速計算問題，我們都知道數學是計算的工具，數值計算是數學的基本功用之一，一門學科從定性的描述到定量分析是這門學科達到成熟的重要工具，現今世界的科技發展日新月異，數值計算已經可以使用計算器或計算機，還學數學做什麼？英國的 M.阿蒂亞（1995）曾這樣說道：「實際上，數學是一門藝術，是一門通過發展概念和技巧以使人們更為輕快地前進從而避免靠蠻力計算的藝術」，比如，計算

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} + \frac{1}{90}$$

靠蠻力計算甚至用計算機都可求得結果，然而觀察分母特點，進行拆分

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{10} \\ &= \frac{9}{10} \end{aligned}$$

省時省力又準確，筆者在文章中研究平方數的快速計算也正是基於上述思

想的啟示，在中學數學教學中幫助學生樹立「數學教化人們的是計算的藝術」的觀念。

此外，隨著社會的發展和進步，人們對數學教育的要求越來越高，過去認為的「在進行計算時做到會算和算得準確」已經不能滿足人們的學習要求，我國《九年義務教育全日制初級中學數學大綱》中也明確對中學數學運算能力的要求，即會根據法則、公式正確地進行計算，並理解算理，能夠根據問題條件，尋求（與設計）合理簡潔的運算途徑，從中我們可以看出對運算能力的培養要求不只是一要瞭解一些有關運算的知識，還要善於分析運算對象的特點和性質，善於運用運算規律和法則，靈活地變換運算程式，選擇最優的運算方法，還要具備熟練的運算技巧，準確且迅速地進行運算求出結果，在運算中還要善於思考，正確運用邏輯方法進行推理，保證運算的合理性。

筆者基於上述考慮，在中學數學教學中有意識地加入培養學生的速算能力和選擇（與設計）最優演算法的能力，正如文中所研究的平方數的速算就可以當做一種很好的嘗試，通過講授和幫助同學探索這種快速計算平方數的方法，可以極大地調動了學生的學習興趣，提高了他們的計算效率和正確性，進而增加他們學習數學的信心，可以把數學課堂延伸到課外，最大程度上提高了教學效果。事實上，再好的計算方法也需要勤加練習，這樣才能熟能生巧。

## 參考文獻

張景斌（2000）。《中學數學教學教程》。北京：科學出版社。

史維海（2000）。《巧算平方數》。《中國石化教育》，1，47。

[英] M.阿蒂亞（1995）。《數學的統一美》。南京：江蘇教育出版社，125

中國人民共和國教育部（1992）。《數學教學大綱（九年義務教育全日制初級中學）》。北京：人民教育出版社

作者電郵： guxianming@yahoo.cn