

周界的概念及其教學

徐思茵、謝巧玲
香港教育學院全日制學生

引言

根據課程指引，四年級周界（一）的學習重點包括：

1. 認識周界的概念。
2. 量度平面圖形的周界。
3. 計算正方形及長方形的周界。
4. 計算簡單平面圖形的周界。（香港課程發展議會，2001，頁 36）

周界概念看似簡單，但在計算簡單平面圖形的周界時，相框的問題總會困擾教師及學生，筆者由從事數學化教學的教師身上，得悉解決問題的方案。本文介紹這方案用上的周界定義、它的教學過程及說明它如何化解相框問題的疑團。

一般書的題目

市面上的教科書及補充練習的題目，最複雜的莫過於涉及相片及相架的周界。學生要從相片的長及闊找出相架的周界，或反過來，從相架的長及闊找出相片的周界。

後者雖然比較困難，但鑑於相片及相架都是矩形，學生一般都能準確計算。既然有計算相片及相架的周界的題目，不禁使人疑惑：其實相框都只是由兩個矩形圍成，為什麼沒有題目要求計算相框的周界（如圖一著色部分）呢？

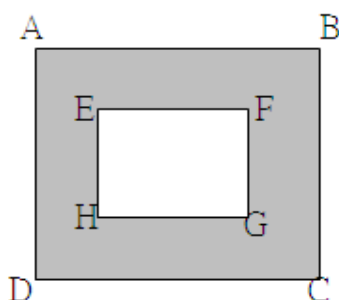


圖 一

處理相框的難點

學生要處理相框這一類的圖形，必先清楚理解周界的定義。一般學生都知道周界是指圖形最外圍線段長度的總和，但面對圖一的相框，就不知道線段 EF、FG、GH、HE 是否圖形最外圍的線段，是否屬於周界的一部分。

大家都避而不談相框的周界，其中一個原因是不知道如何解釋線段 EF、FG、GH、HE 是否屬於周界的一部分。

一般教科書如何定義周界

由於教師及教科書一般只側重學生運算方面的技巧和速度（鄧幹明，2002），相對地理解周界的意義就被輕輕帶過。坊間教科書對於周界的定義，亦有不同演繹。教科書甲解釋一件物件或一個圖形的周圍界線稱為周界。周界只能用於平面圖形上，物件是佔有體積的立體，如柱體、錐體、球體等都不能以周界表示其邊界大小，而是要用總表面面積，要談及周界應該是指該立體的其中一個面，例如：桌面或書的封面。因此，這個定義有欠準確。

教科書乙指周界是一個平面圖形的外圍界線。如果根據這個定義，線段 EF、FG、GH、HE 是否屬於外圍界線？還是內圍界線？面對相框這一類圖形，這個定義存在含糊的地方，未能協助學生處理與周界概念有關的問題。

正確定義的重要性

鄧幹明（2000）指出其實正確概念卻往往比求得正確的答案來得更為重要，對學生的學習，特別是後期的學習更具深遠的影響。根據課程指引，學生在六年級及初中均要計算涉及圓形的圖形周界（香港課程發展議會，1999，2001）。換言之，學生未能對周界有個清晰的理解，對於往後的學習會造成障礙。

周界定義商榷

周界有時也叫周長，其中一種定義是：「封閉的平面圖形邊界的總長叫做這個圖形的周長」（顧汝佐等，1995，頁 354）。教師要以此定義解釋周界需要計算的部分，就必須先向學生解釋何謂封閉的平面圖形。

有學者曾為以折線圍成的封閉平面圖形作以下解釋：「如果一折線中的任意一端點都不會只位於一條線段之上，則稱它為封閉圖形」（文耀光，2007，頁 26）。

根據文耀光（2007）對封閉圖形定義，要討論圖一是否封閉圖形，必先考慮它是否由一條折線圍成。我們發現圖一是由兩條折線圍成，分別是折線 ABCD 及折線 EFGH。那麼，圖一是否封閉圖形呢？相信仍有爭議。

再討論另一個平面圖形例子，根據文耀光（2007）的封閉圖形定義，我們發現圖二是由一條折線圍成，但圖中一折線上的端點 E 只位於一條線段之上，即圖二不是封閉圖形。若果不是封閉圖形，究竟圖二有沒有周界呢？

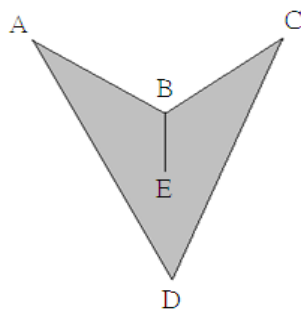
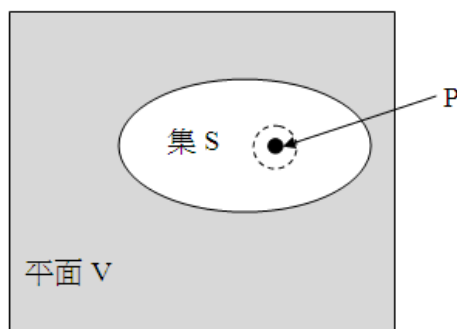


圖 二

故此，文耀光（2007）對封閉圖形的定義，仍有需要作進一步補充解說。如何定義周界，才可把其意思解釋得清楚？

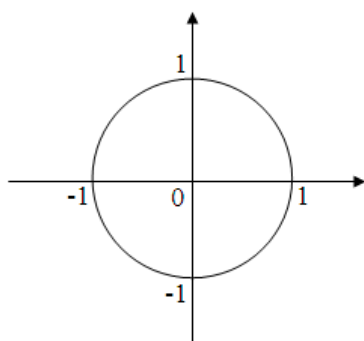
從區分內外入手

依拓撲學（topology）慣用的定義，一個平面上的點集 S ，會把平面上的點分成三類：集 S 的內點（interior point）、集 S 的外點（exterior point）和集 S 的邊界點（boundary point）（Borges，2000）。在我們熟識的二維空間內，如果以圖三 P 點為中心，畫一個足夠小的圓圈，可使整個圓圈內的所有點都屬於集 S ，就叫 P 做 S 集的內點；如果 P 點是 S 的補集（complement）的內點，叫 P 做 S 集的外點；其他平面上的點就叫集 S 的邊界點。邊界點另一等價定義（equivalent definition）是：若以 P 點為中心畫的任何一個圓圈都包含至少一點屬於 S 及至少一點不屬於 S ， P 點就叫集 S 的邊界點（見 Kahn，1995）。

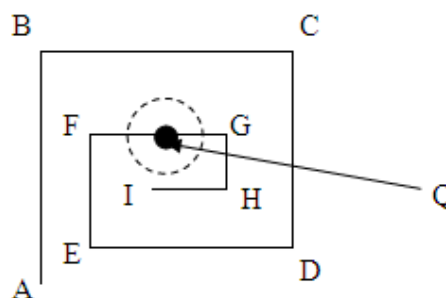


圖三

一般來說，集 S 的內點屬於集 S ；集的外點不屬於集 S ；邊界點則可以是屬於或不屬於集 S 。例如 $S_1 = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}$ 的全部邊界點即是單位圓 $x^2 + y^2 = 1$ ，沒有一點屬於 S_1 ； $S_2 = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1, 0)\}$ 只包含一個邊界點 $(1, 0)$ ；而 $S_3 = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ 則包含了全部邊界點。圖四中的單位圓網羅了 S_1 、 S_2 和 S_3 的全部邊界點，因此叫它們的邊界。



圖四



圖五

參考圖五，根據上述定義，若集 S 為圖五中的線段 AB 、 BC 、 CD 、 DE 、 EF 、 FG 、 GH 、 HI 上所有點，無論在 Q 點上畫如何小的圓圈，都不可能使它之內的所有點全屬於 S 或 S 的補集，即 Q 為集 S 的邊界點。由此可推論， AB 、 BC 、 CD 、 DE 、 EF 、 FG 、 GH 、 HI 為集 S 的邊界，那麼圖五的周界就是 $AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HI$ 嗎？

國立教育研究院籌備處研究員指出「兒童對於內外的區別很早便能體會」(周筱亭、劉君毅，2006，頁 52)，而生活中很多情景都能讓兒童了解內外的意義，他們亦很直觀地認為邊界定必是圍住一些東西，並把圖形分成內外兩部分。如圖六的例子：

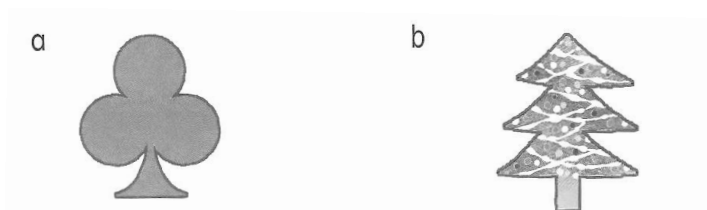


圖 六

(盧樸川，2006，頁 47)

即使圖內有花紋，但學生很容易就能辨認出邊界，因為他們清楚什麼是圖內及圖外。因此，根據拓撲學，圖五有邊界，但我們都未必想談及周界，因為不知道它圍著甚麼。從事數學化教學的教師，也注意到這結果與學生的心智發展不太一致，故他們為邊界下了另一個定義，令到圖五的邊界不存在。

從事數學化教學的教師定義，可分為內外的平面圖形的邊界長度的總和為周界。

第一，要談周界，就必須有邊界存在。但他們對「邊界點」的定義與拓撲學有所不同，他們要求以「邊界點」為中心畫出的任何圓圈之內，都必須同時含有集的內點和外點。把這種邊界點的定義轉化成課室語言，就是「旁邊既含圖內，亦含圖外」。

第二，要邊界存在，圖形是必須可分內外的。簡單而言，平面圖形的邊界把平面圖形分成「圖內」和「圖外」兩部分。教師利用學生早已體會的直觀概念——「圖內」和「圖外」來定義邊界，進而認識周界，應該更符合學生心智發展，令學生更易接受。為此，本文提供了以下教學建議。

數學化的周界教學建議

以下的教學建議是來自從事數學化教學的教師，一直口耳相傳，不曾記諸文字。

教師先教導借助「圖內」和「圖外」來認識邊界，參考圖七，點在著色部分稱為圖內；點在沒有著色部分稱為圖外。一點的旁邊如果既有「圖內」，亦有「圖外」，這點就叫邊界點，所有邊界點連在一起就是圖形的邊界。於圖七中，點 A 在「圖內」；點 B 在「圖外」；線段 PQ 上任何一點 C，

旁邊包括「圖內」和「圖外」，因此這線段 PQ 便是邊界的一部分。接著教師指出有「邊界」就有「周界」，周界的定義是平面圖形的邊界長度的總和。所以圖七的周界是 $PQ + QR + RS + PS$ 。

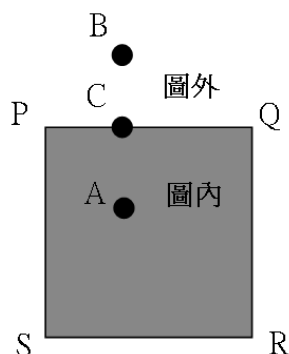


圖 七

教師為周界下了定義後，可給予辨認邊界的活動，如：圖八、圖九、以及剛才具爭議性例子——圖二，著學生使用顏色筆把圖形的邊界塗上顏色。於圖八中，除了線段首尾兩點外，CH、CN、NK、KH、DG 上的所有點，旁邊都只包括「圖內」，故它們不是邊界點。相反，AN、NM、ML、LK、KJ、JI、IH、HF、FE、EC、CB、BA 上的所有點，旁邊均包括「圖內」和「圖外」，故這些線段組成了圖形的邊界。周界就是 $AN + NM + ML + LK + KJ + JI + IH + HF + FE + EC + CB + BA$ 。再參考另一反例子，於圖九中，圖中任何一點，旁邊都不能分辨出是在「圖內」還是「圖外」，故圖九沒有邊界，即沒有周界。

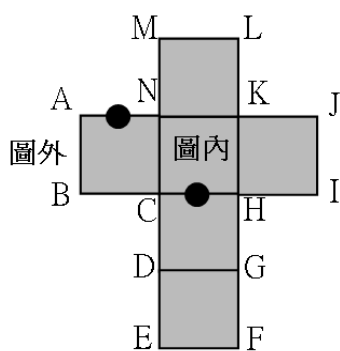


圖 八

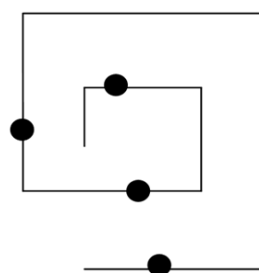


圖 九

再討論剛才具爭議性例子——圖二，除了點 B 外，BE 上的所有點，旁邊都只包括「圖內」，故它們不是邊界點。相反，AB、BC、CD、DA 上的所有點，旁邊均包括「圖內」和「圖外」，故這些線段組成了圖形的邊界。

周界就是 $AB + BC + CD + DA$ 。

根據以上原則討論相片、相架、相框的周界，如圖十所示。

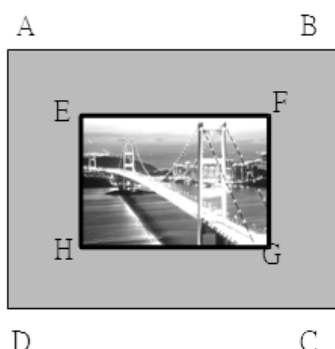


圖 十

首先，相片圖十一的周界不難計算。於圖七的例子已解釋，相片的周界是 $EF + FG + GH + HE$ 。



圖 十一

相架的周界又該如何計算。

學生先借助「圖內」和「圖外」來辨認出相架的邊界。如圖十二所示， AB 、 BC 、 CD 、 DA 上的所有點，旁邊都包括「圖內」和「圖外」，故這些線段組成了相架的邊界。相反， EF 、 FG 、 GH 、 HE 上的所有點，旁邊都只包括「圖內」，故它們不是邊界點。

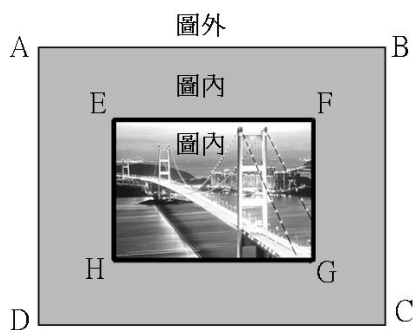


圖 十二

最後，學生計算相架的邊界長度總和，得出相架的周界是 $AB + BC + CD + AD$ 。

類推下去，相框的周界又該如何計算。

學生先借助「圖內」和「圖外」來辨認出相框的邊界。如圖十三所示， AB 、 BC 、 CD 、 DA 、 EF 、 FG 、 GH 、 HE 上的所有點，旁邊均包括「圖內」和「圖外」，故這些線段組成了相框的邊界。

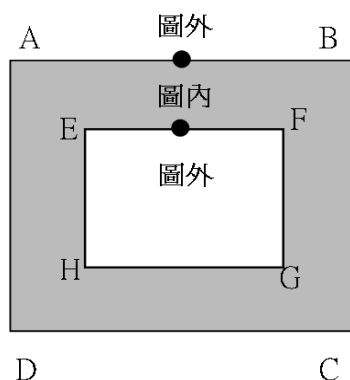


圖 十三

最後，學生計算相框的邊界長度總和，得出相框的周界是 $AB + BC + CD + DA + EF + FG + GH + HE$ 。

總結

一般教科書對相框的周界避而不談，原因是因為不知如何解釋周界的定義，部分教科書定義含糊或涉及學生未認識的數學詞彙，導致學生根本不了解何謂周界。

教師如能於周界的概念課用學生所熟悉的數學詞語如：「圖內」和「圖外」，以解釋當中的定義——圖形的邊界長度的總和就是周界，讓學生對周界有清晰的理解，相信將來遇上相框或更複雜的題目都不會成為難題了。

作者感謝香港教育學院馮振業博士提供不少寶貴意見。

參考資料

- Borges, C. R. (2000). *Elementary topology and applications*. Singapore: World Scientific.
- Kahn, D.W. (1995). *Topology: An Introduction to the Point-Set and Algebraic Areas*. New York: Dover.
- 文耀光 (2007)。《幾何與度量》。香港：教育出版社。
- 周筱亭、劉君毅 (2006)。《國中小數學教材與教學探討：幾何篇》。台北：國立教育研究院籌備處。
- 香港課程發展議會 (1999)。《數學課程指引 (中一至中五)》。香港：教育局。
- 香港課程發展議會 (2001)。《數學課程指引 (小一至小六)》。香港：教育局。
- 鄧幹明 (2002)。探討數學教育上的另類思維。《數學教育》14 期，28 –34。
- 盧樸川 (2006)。《小學數學 (4 上 B)》。香港：新亞洲出版社。
- 顧汝佐、葉季明、王明歡 (1995)。《小學教學全書·數學卷》。上海：上海教育出版社。

作者電郵：徐思茵 misstsuiszeyan@gmail.com

謝巧玲 tsehauling@gmail.com