

初小的除法直式，怎樣才是最好？

黃宇詩

香港教育學院全日制學生

引言

除法可算是初小學生最難掌握的課題之一，學生往往會在直式（長除式）的運算過程中混淆商的位值，引至運算錯誤。尤其當商需要補「0」時，失誤就更多。長除式出現於整數除法、小數除法、甚至中學的多項式除法等多個課題。學生能否正確掌握長除式的應用和原理，是一個關鍵。初小學生新建構一種知識，不少學校會要求學生遵循某種長除式的格式。那麼，在學理上沒有錯誤的長除式當中，哪一種表達方法才能最有效減少學生的錯誤，並且可以減少過於冗長的書寫？

運用長除式計算除數，可以有很多不同的表達方法。只要明白長除式箇中的意義，除式的對錯並不難判斷。對於學生不同的表達方式，只要學理上正確，教師大可接受。有關長除式的原理可參看《數學化教學：難點選編》（馮，1999）及《數學化教學－除法》（馮、王、葉、何，2000），此處不贅。

比較三種不退位的長除式寫法

以下是出現在香港小學教科書中三種常用的不退位長除式格式：

甲)	乙)	丙)
$\begin{array}{r} 2 \ 4 \\ 2 \overline{) 4 \ 8} \\ \underline{4} \\ 8 \\ \underline{8} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \ 4 \\ 2 \overline{) 4 \ 8} \\ \underline{4 \ 0} \\ 8 \\ \underline{8} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \ 4 \\ 2 \overline{) 4 \ 8} \\ \underline{4 \ 8} \\ 0 \end{array}$

甲的寫法是傳統的長除格式，與退位除法（例如 $58 \div 2$ ）的格式相同，最廣泛地被教科書採用（例如《新一代數學》、《新紀元小學數學》、《廿一世紀現代數學》）。但對於計算不退位除法而言，這種寫法的作用似乎不大。在學習初期，學生因未有接觸退位除法的題目，往往不明白「把數字（即

個位的 8) 拉下分步計算」的步驟意義何在。當學生因未能掌握甲的寫法而在家課上列出丙的格式，有些教師會不知如何批改。學理上，丙的寫法當然沒有錯誤（見馮，2002），但教師卻總是希望能統一學生的格式。值得我們思考的，是甲的寫法對於不退位除法而言，會否過於冗長？

乙的寫法與甲十分相似，部份教科書在建構知識初期會展示這種寫法，並以虛線或不同的顏色展示被除數下方的「0」（例如《新一代數學》、《廿一世紀現代數學》）。目的是先幫助學生理解除式原理，再在稍後的教學中說明這些「0」可被省略，而轉用甲的表達方式。但若教師為釐清學生位值上的概念，而直接使用這個表達方式，過後仍不要求學生把「0」省略，做法並不理想。以 $681 \div 3$ 為例，乙的格式步驟如下：

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 3 \overline{) 681} \\
 \underline{600} \\
 81
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 2 \quad 2 \\
 3 \overline{) 681} \\
 \underline{600} \\
 81 \\
 \underline{60} \\
 21
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 2 \quad 2 \quad 7 \\
 3 \overline{) 681} \\
 \underline{600} \\
 81 \\
 \underline{60} \\
 21 \\
 \underline{21} \\
 0
 \end{array}$$

當數值很大，乙的寫法便變得冗長。試想想計算 $1234567890 \div 2$ 的長除式會是怎樣？另外，由於這種方法沒有補「0」的必要，當商涉及補「0」的情況時，學生的概念便很容易出現混淆。例如計算 $60 \div 3$ 時，乙的表達方式第一個步驟便已在被除數下方寫上 60，從這個未完成的長除式中，學生容易誤以為 $60 \div 3 = 2$ （見丁例）。同理，學生計算 $606 \div 3$ 時，也容易忽略了十位的處理（見戊例）。因此，建議只在教學初期使用乙的寫法。

$$\begin{array}{r}
 \text{丁)} \quad 2 \\
 3 \overline{) 60} \\
 \underline{60} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \text{戊)} \quad 2 \quad 2 \\
 3 \overline{) 606} \\
 \underline{606} \\
 6 \\
 \underline{6} \\
 0
 \end{array}$$

至於丙的寫法明顯是最簡便，學生既可分步計算，亦可一步計算。然而，香港小學除了計算整十的不退位運算（如 $60 \div 2$ ）外，較少教科書使用這個方法。這個方法簡單清晰，是不退位除法的長除式的理想表達模式。建議在初小學生新學習一種運算程序時，以丙的方式表達不退位除法，再配合甲的方式表達退位除法。教學時，教師仍可教授除式本身的意義，只需強調當中位值的分別便可。以 $896 \div 4$ 為例，在十進位制下，896 以數粒表示即 8 塊 9 條和 6 粒。當這除式表達均分除法時，教學步驟的語言如下：

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 4 \overline{) 896} \\
 \underline{8} \\
 8 \\
 \underline{8} \\
 0
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 2 \quad 2 \\
 4 \overline{) 896} \\
 \underline{88} \\
 1
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 2 \quad 2 \\
 4 \overline{) 896} \\
 \underline{880} \\
 16
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{r}
 2 \quad 2 \quad 4 \\
 4 \overline{) 896} \\
 \underline{880} \\
 16 \\
 \underline{16} \\
 0
 \end{array}$$

8 塊平均分成 4 份 每份有 2 塊 共分去 8 塊	8 條平均分成 4 份 每份有 2 條 共分去 8 條 還餘下 1 條	現在餘下的還有 1 條和 6 粒 即 16 粒	16 粒平均分成 4 份 每份有 4 粒 共分去 16 粒
-----------------------------------	----------------------------------------------	-------------------------------	-------------------------------------

詳盡的整數除法教學及其數學語言可參考《小學帶餘除法的教學》（馮，2008）。

最後，多舉一例，方便大家清楚了解每種格式的做法，並比對其優劣。

I (甲)	II (乙)	III (丙+甲)
$ \begin{array}{r} 4 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ 6 \overline{) 24680} \\ \underline{24} \\ 6 \\ \underline{6} \\ 8 \\ \underline{6} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 2 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 4 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ 6 \overline{) 24680} \\ \underline{24000} \\ 680 \\ \underline{600} \\ 80 \\ \underline{60} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 2 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 4 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ 6 \overline{) 24680} \\ \underline{2466} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 2 \end{array} $

上述例子中，III 的除式中，不退位部份運用了丙的表達方式，退位的部份則運用了甲的格式。由此例可見，III 的方法顯然比其餘兩種表達方式簡明，化簡了不必要的步驟，卻不失長除式的意義，是個較為理想的表達方式。

結語

儘管本文提及的長除式書寫方法並不一定最好，但期望能給予一點啟發，繼續加以改良。雖然目前的小學教科書甚少，甚至沒有採用 III（除式不退位部份運用了丙的表達方式，退位的部份則運用了甲的格式）的表達方式，但作為教師應對教材有所選擇取捨，經常以批判的角度思考，設法突破因循的教學模式，避免將習以為常的方法視作最理想或是唯一的方法。

本文得馮振業博士提供意見，謹此致意。

參考文獻

- 馮振業（1999）。《數學化教學：難點選編》。香港：作者。
- 馮振業、王倩婷、葉嘉慧、何妙珍（2000）。《數學化教學—除法》。香港：作者。
- 馮振業（2002）。是格式問題嗎？由兩個例子說起。《數學教育》14 期，16—21。（後收入吳丹(編)（2007）。《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》（頁 177—183）。香港：香港數學教育學會。
- 馮振業（2008）。小學帶餘除法的教學。《數學教育》27 期，34—46。
- 馮振業、李詩雅、王倩婷（2007）。《新紀元小學數學》。香港：牛津大學出版社。
- 現代教育研究社編輯委員會（2006）。《廿一世紀現代數學》。香港：現代教育研究社。
- 梁易天、劉應泉（2007）。《新一代數學》。香港：朗文香港教育。

作者電郵：zippywong@hotmail.com.hk