一次意外成就一次探究

王　聖
安徽滁州中學

在高三一堂三角函數的複習課上，由於一位學生的意外提問，打斷了原有的課堂安排，生成了富有探究的一節課，特此摘錄課堂片段與同行分享。

問題：　$y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 的對稱軸和對稱中心分別是什麼？

學生思考了片刻，有同學舉手，我示意其站起來。

學生 1：$y = \sin x$ 的對稱軸方程是 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$，對稱中心是 $(k\pi, 0)$；
$y = \cos x$ 的對稱軸方程是 $x = k\pi$，對稱中心是 $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0)$，其中 $k \in \mathbf{Z}$。

正準備繼續按原計畫講解其他內容時，被一位學生意外地打斷，完全改變了整堂課的進程。

學生 2：老師，正弦函數的對稱軸方程 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 為餘弦函數對稱中心的橫坐標；而正弦函數對稱中心的橫坐標 $k\pi$ 是餘弦函數的對稱軸，為何會如此巧合呢？

課堂頓時七嘴八舌的議論開來⋯⋯

學生 3：老師，從正弦函數、餘弦函數的圖像其實很容易觀察出來。

學生 4：其實從平移的角度更一目了然，$f(x) = \sin x$ 向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 個單位，即得函數 $f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$，由此易知對稱軸與對稱中心橫坐標的關係。

很好。我及時的鼓勵了一下。

學生 5：函數 $y = \sin x$ 與 $y = \cos x$，如果從導數角度看有 $(\sin x)' = \cos x$，這個僅僅是巧合，還是有更深層的含義呢？

下面學生對於此提問發出了嘖嘖的讚歎聲 ……，至此，我也順勢鼓勵學生分組討論。

學生 6：若一個函數對稱軸存在，則此對稱軸方程為此函數導函數對稱中心的橫坐標；若一個函數對稱中心存在，則此對稱中心的橫坐標為此函數導函數的對稱軸方程。老師，不知道我上面的猜想是否正確呢？

學生 7：老師，我想起來一例，好像與此結論正好吻合。
$y = x^3$ 的對稱中心為 $(0 , 0)$，而其導函數 $y = 3x^2$ 對稱軸為 $x = 0$，與同學 6 的結論正好一致。

非常好，同學 7 的聯想很好。此時有位同學舉起了手，我示意其起來。

學生 8：不知更一般的情況是否仍然成立呢？對於函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 與其導函數 $g(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ 是不是有上面幾位同學所述的結論呢？易知函數 $y = g(x)$ 的對稱軸為 $x = -\dfrac{b}{3a}$，能否證明 $\left(-\dfrac{b}{3a}, f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$ 是函數 $y = f(x)$ 的對稱中心呢？

此問題提的非常好，同學們可以先互相討論一下。不一會，一位同學站起來了。

學生 9：老師，我剛才在下面計算了下，我能上黑板板書嗎？

我示意其上來。

$$\forall\, x \in \mathbf{R},\quad f(x) + f\left(-\frac{2b}{3a} - x\right)$$

$$= \quad (ax^3 + bx^2 + cx + d) + \left(a\left(-\frac{2b}{3a} - x\right)^3 + b\left(-\frac{2b}{3a} - x\right)^2 + c\left(-\frac{2b}{3a} - x\right) + d\right)$$

$$= \quad 2(a(-\frac{b}{3a})^3 + b(-\frac{b}{3a})^2 + c(-\frac{b}{3a}) + d)$$

$$= \quad 2f(-\frac{b}{3a})$$

即得到 $(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$ 是函數 $y = f(x)$ 的對稱中心。

教室裏響起了雷鳴般的掌聲，此時又有位同學站了起來。

學生 10：老師，對於正弦函數餘弦函數以及三次函數與其對應的導數都得到了類似的結論，對於其他函數是否具有更一般性的結論呢？

此時教室陷入一片沉寂，靜的連掉下一根針的聲音都能聽見，學生們都在思考著。

學生 11：我們在複習函數章節時，我記得有這樣的結論：若函數 $y = f(x)$ 滿足如下條件：$f(a+x) = f(b-x)$，則函數 $y = f(x)$ 的對稱軸方程為 $x = \frac{a+b}{2}$。那麼其導函數 $y = f'(x)$ 是否是中心對稱圖形，若是，對稱中心是多少呢？

我不禁為我學生思維的開闊性帶頭鼓起了掌。

學生 12：為了得到導函數的性質，可以求一下導啊。

我順水推舟，示意其上黑板板書。

$$\begin{aligned}
& f(a+x) &=& \ f(b-x) \\
\Rightarrow\quad & (f(a+x))' &=& \ (f(b-x))' \\
\Rightarrow\quad & f'(a+x)\,(a+x)' &=& \ f'(b-x)\,(b-x)' \\
\Rightarrow\quad & f'(a+x) &=& \ -f'(b-x)
\end{aligned}$$

由 x 的任意性易得函數 $y = f(x)$ 的對稱中心為 $(\frac{a+b}{2}, 0)$。

學生 13：老師，受上面同學的啟發，以上結論的逆命題之也成立，即：若函數 $y = f(x)$ 滿足如下條件：$f(a+x) = f(b-x)$，則函數 $y = f(x)$ 的

對稱軸中心為 $(\frac{a+b}{2}, 0)$。那麼其導函數 $y = f'(x)$ 的對稱軸方程為 $x = \frac{a+b}{2}$。

……

本節課是三角函數性質的內容講解，雖然課時被耽誤了，也或許這些結論早已被人發現，但對於我和我的學生來說整個探究的過程無疑是原創的。此探究過程進一步的提升了學生分析問題、解決問題的能力。

作者電郵：ahczzxws2003@126.com