

兩個數的和會等於它們的積嗎？

許慧貞

兩個數的和會等於它們的積嗎？筆者曾經將這個問題分別詢問幾位初中學生，他們的第一個反應都是「沒有可能吧！加數和乘數不相同啊！」，我鼓勵他們找一些數字試試，部份同學得到「兩個數都是 0 或者都是 2」便停了下來，無以為繼，其他的連這個簡單結果也得不到。

我繼續引導他們分別將 $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 等代入 $x + y = xy$ 之中，從而得到 $(0, 0)$ 、 $(2, 2)$ 、 $(3, \frac{3}{2})$ 、 $(4, \frac{4}{3})$ 、 $(5, \frac{5}{4})$ ，及當 $x = 1$ 時， y 無解等結果，解除了他們認為「兩個數的和不可能等於它們的積」的疑惑。但是，要全面理解這個問題，得將主項變為 y 。從 $y = \frac{x}{x-1}$ 可以清楚看到，除了 1 以外，對於其他所有的 x 值， y 都有解。亦可以觀察到上述的解其實是 $(0, \frac{0}{0-1})$ 、 $(2, \frac{2}{2-1})$ 、 $(3, \frac{3}{3-1})$ 、 $(4, \frac{4}{4-1})$ 、 $(5, \frac{5}{5-1})$ ，它們都符合 $(t, \frac{t}{t-1})$ 的模式。以上的討論只是集中於代入 x 等於 0 或正整數，如果學生仍有興趣，可以將探討範圍擴大至負數或分數。有趣的是，由於 x 及 y 的角色可以互換，自然亦有 $x = \frac{y}{y-1}$ ，當 $y = 1$ 時， x 亦無解；而且 $(\frac{3}{2}, 3)$ 、 $(\frac{4}{3}, 4)$ 和 $(\frac{5}{4}, 5)$ 都是解。設 $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ，有 $f \circ f(x) = x$ 。最後，可以練習一下代數分數加法：證明 $x + \frac{x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$ 。

考慮加、減、乘、除的各種組合，除上述問題，還有五個類似的疑問：

- (一) 兩個數的和會等於它們的差嗎？
- (二) 兩個數的和會等於它們的商嗎？
- (三) 兩個數的差會等於它們的積嗎？
- (四) 兩個數的差會等於它們的商嗎？
- (五) 兩個數的積會等於它們的商嗎？

關於問題（一），將 $x + y = x - y$ 簡化及移項，得到 $y = 0$ 。 x 可以取任意值， y 值只有一個可能，就是等於 0。

關於問題（二），考慮 $x + y = \frac{x}{y}$ 。首先有限制 $y \neq 0$ ，全式乘以 y 再移項得 $y^2 + xy - x = 0$ 。將 x 化為主項得 $x = \frac{y^2}{y-1}$ ，於是有另一些限制 $x \neq 0$ 及 $y \neq 1$ 。將 y 化為主項得 $y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + 4x}}{2}$ 。 x 的可取值範圍是“ $x \leq -4$ 或 $x > 0$ ”，而在“ $x \leq -4$ 或 $x > 0$ ”範圍內的 x 值會給出兩個 y 值，這些都是高中程度的數學了。對於初中的學生，如果不打算深入探討，觀察及驗算一下數字的解例如 $(-4, 2)$ 、 $(-4.5, 3)$ 、 $(-4.5, 1.5)$ 、 $(-\frac{16}{3}, 4)$ 、 $(-\frac{16}{3}, \frac{4}{3})$ 、 $(-6.25, 5)$ 、 $(-6.25, 1.25)$ 等等，也是饒有趣味的。證明 $\frac{y^2}{1-y} + y = \frac{y}{1-y}$ 也是一項有意義的代數分式練習。

至於問題（三）和問題（四）分別與文首的問題及問題（二）類似，不贅。

最後一個問題（五），考慮 $xy = \frac{x}{y}$ ，先有限制 $y \neq 0$ ，全式乘以 y ，然後移項及因式分解得 $x(y+1)(y-1) = 0$ ，從而得到一個簡潔的解：當 $x = 0$ 時， y 可取非零任意值；當 x 取非零任意值時， y 只能等於 $+1$ 或 -1 。

這一系列六個簡單的開放題提供了可供學生探究的材料，但我們並不滿足於只找到一個或數個符合命題的特例；適當地運用代數技巧，才能正確地和全面地求解。符號化規範化的代數系統提供了一個有效的推理解難的平台，讓我們按部就班地找到真相。

這裡，筆者以兩個涉及不等式的問題作結：

1. 兩個數的和有可能小於它們個別的值嗎？即是說： $a + b < a$ 有可能嗎？
2. 一個數字的平方是否一定大於該數字本身？即是說： $a^2 > a$ 一定對嗎？