

共濟的鱗片：十二載數學化教學的省思

馮振業

香港教育學院數學與資訊科技學系

引言

香港數學教育學會創立之初，提出「四維共濟」作為發展數學教育的綱領(黃, 1995)。縱向跨越小、中、大學教育及教師教育，橫向涵蓋學生、教師、數學工作者和數學教育工作者。置身其中，我認定自己乃從事教師教育的數學教育工作者。誠然，數學教育工作涉面甚廣，層次亦多，猶如一頭巨龍。個人的接觸面，難免只及其一鱗半爪。為了不致精力過於分散，陷入杯水車薪，勞而無功的境地，十二年前，便下定決心，與小學數學教師同行，為數學教育的發展努力。當時的心念十分單純，只求目睹優秀的數學課在小學的教室出現。此共濟之旅，始於 1998 年優質教育基金的撥款，成就了我推動的數學化教學。

過去十二年，自己專注協助小學教師推行數學化教學，數學教育領域內的其他事情，涉獵不多，所看到的景象，恰似巨龍身上的一塊鱗片。如果以此推敲香港數學教育的形勢，難免失諸偏頗。建議讀者以一個實踐主義者的自白看待本文，省去過多的聯想。本文有三大主旨：(一) 實踐數學化教學的心路歷程；(二) 簡單介紹對數學化教學有重大啟發的人物及他們的思想；(三) 報告十二年數學化教學的進展及其對香港教育環境產生的影響。礙於篇幅所限，必須略去有關課題教學設計的討論。由於不少工作已有文字記載，有興趣的讀者應可找到相關的資料。

從哪裡開始？

在闖進小學課堂之前，腦子裡曾經浮出一大堆問號，其中較重要的是：自己沒有小學教學經驗，憑甚麼要小學教師理會我？如果有教師願意和我交流，我可以對他（她）的工作作出怎樣的貢獻？在欠缺實踐經驗的前提下，我只可能在理論層面有些貢獻。可是，教師需要哪些理論？如果教師願意在繁重的工作之下，騰出一點時間學習新知識，我應建議他（她）學些甚麼？

自 1991 年開始從事數學教師培訓工作，即反覆面對一個無法逃避，卻又很難回答的問題：「為何要按如此這般的鋪排，教授某某課題？」多年來，最常聽見的回答，不外是「某某課本是這樣教的」或「某某專家說要這樣教的」。這種訴諸權威的心態，泛濫得使我時常以「理念真空」來描述教師的教學決策。數學解難教學一代宗師喬治·波利亞（George Pólya）也曾批評這種沒有靈魂的教學工作：

Now, in teaching as in several other things, it does not matter much what your philosophy is or is not. It matters more whether you have a philosophy or not. And it matters very much whether you try to live up to your philosophy or not. The only principles of teaching which I thoroughly dislike are those to which people pay only lip service. (Pólya, 1962/1981, v.2, p.106)

當準教師被要求交代教學設計背後的理念時，容易搬出一些來自心理學研究的跨學科理論。可是，這些理論很少能照顧數學的獨特性，更遑論解決數學科的教學問題。過去半世紀有關數學教學研究，有不少是以心理學研究作為基礎的。近年流行研究「學習」，著重探討學習者的表現和思考過程，對教學工作的構思和組織，卻較少觸及。對於這種應用心理學理論，試圖解決數學教學問題的取向，波利亞參考了心理學家的研究之後，很小心地指出它的不足：

Teaching is, in my opinion, not just a branch of applied psychology — at any rate, it is not yet that for the present.

Teaching is correlated with learning. ... Yet there is a difference. We are principally concerned here with complex learning situations, such as learning algebra or learning teaching, and their long-term educational effects. The psychologists, however, devote most of their attention to, and do their best work about, simplified short-term situations. Thus the psychology of learning may give us interesting hints, but it cannot pretend to pass ultimate judgment upon problems of teaching. (Pólya, 1962/1981, v.2, p.100)

心理學家也很清楚，要把心理學研究轉化成有效的教學行為，實乃教學工程學的工作範圍，需要的是工程師，他們必須是擁有專科知識和熟識專科教學的人：

The process [to turn research results into practice] requires the cooperation of “applied behavioral engineers” as well as academic psychologists and instructors or teachers in the field. There is much work to be done of an engineering nature. ... learning researchers are ... most likely to turn their few ideas for educational methods or materials over to an educationalist or curriculum development center. Clearly, the full set of activities needed to get a curriculum idea adopted is a job for a specialist (Bower & Hilgard, 1981, p.575).

顯然，沒有數學教師的合作，心理學的理论將無法轉化成有效的數學教學行為。然而，在追求教好數學的大前提下，教師應選擇把精力投放到心理學、數學或其他學問之上，端視各種學問，可幫助教師帶來怎樣的數學教學效果。作為一個不曾修讀心理學的人，我選擇了向教師介紹數學。

對大部分不曾修過多少高等數學的小學教師而言，甚麼是有血有肉的數學行為，甚麼是有水準的數學課，一概頗為陌生。正如很多小學教師曾向我反映，時興的集體備課，可能只是讓教師把一眾無效的想法串起來的場合而已。換言之，要幫教師教好數學，必須先讓他們多看優秀的數學課，並藉此點出哪些是真實的、有義意的數學行為。要做到這一點，就不可能迴避數學。問題是：教師會相信自己連小學數學也未懂得透澈，願意花時間跟別人研討嗎？

大師的追隨者

在構思和推行數學化教學的時候，最需要處理的是教師的承受能力。兩位數學教育領域的大師喬治·波利亞（George Pólya）和漢斯·弗賴登塔爾（Hans Freudenthal），都是實踐數學教育的先行者，他們的思想從開始就指導著數學化教學的推行。

If we design teaching material and methods, we should not only weigh up what can be learned and is worth learning, we should also be concerned about what kind of subject matter the teacher can learn to teach, or rather what we can teach our teachers to teach their pupils. (Freudenthal, 1973, p.vii)

過多或過深的數學內容或表達方式，都會令小學教師卻步。淡化數學學理的探討，又無法令教學變得更有數學內涵。如何在兩者之間取得有效的平衡，正如波利亞反覆重申，是一門藝術 (Pólya, 1962/1981)。我的信念是：深化對課程內容的理解，才會令教師的教學效能顯著地提高。然而，這項工作要顧及教師的承受能力，往往不可能一蹴而就。好的教學設計，如果找不到教師傾情演繹，也是徒然。過去十二年，從事數學化教學的人，總是在想：可以做出來的，怎樣才算是好？對不同人來說，甚麼是「可以做出來的」，存在很大的差別。一方面是數學修養不同，另一方面是教學造詣有異。在數學化教學團隊(下簡稱「團隊」)之中，有剛入行的年青教師，也有非常老練的專家教師。他們可以做到的相去甚遠，願意執行的教學設計存在頗大差異。唯一相同的，是追求的理想。

數學化教學立足於弗賴登塔爾提出的數學化 (mathematising) 觀點 (Freudenthal, 1973, 1991)，認同應該讓學生經歷數學再創造的過程，這是團隊的共同理想。鮮為人知的，是波利亞不約而同地也持相同的想法。

In a sense youngsters should repeat history though not the one that actually took place but the one that would have taken if our ancestors had known what we are fortunate enough to know. (Freudenthal, 1981, p.140)

Planning the curriculum involves more than choosing the facts and theories to be taught; we must also foresee in what sequence and by what methods those facts and theories should be taught. ... In teaching a branch of science (or a theory, or a concept) we should let the human child retrace the great steps of the mental evolution of the human race.

Of course, we should not let him repeat in details the thousand and one error of the past, just the great steps.

This principle ... is a guide to, not a substitute for, judgment.
(Pólya, 1962/1981, v.2, p.132)

置身現今的學校環境，教師最關心的是學生的成績。要說服教師考慮一種構想，最有效莫過於令他（她）看到學生成績提升的前景。早期的數學化教學，因欠缺足夠的案例，只能藉思維實驗（*thought-experiment*）令教師想像推行數學化教學的潛在益處。這種推介手法，對數學教學分析能力較高的教師會有一點衝擊；對慣跟書本的教師，卻不易引起共鳴。弗賴登塔爾作為實踐數學教育的一代宗師，早就洞悉此一障礙。

So the teacher student needs to relearn by observing the learning processes of less skilled people — in fact, of children. ... Lack of experience in long-term learning processes is the actual cause for the depending of young and even older teachers on textbooks as their only sources of knowledge on long-term learning processes.
(Freudenthal, 1991, p.174)

為了令教師可以更好地掌握學生真正的學習過程，數學化教學著重探討整個課題的教學布置和學習成效，而非只看重某一教節。對初次試行的教師，會鼓勵他們進行全課題的教學攝錄。這些教學錄像，有助教師認識自己的教學能力，並可揭示學生如何在長時間的學習歷程中成長。

當數學化教學走過了初始的階段，便逐漸累積了一些教學案例。為了令後來者有一些參考資料，團隊成員會把實踐數學化教學的經驗記錄。這些記錄可分成兩大類別：（一）工作報告 —— 主旨在於把教學的實踐過程和成效記錄下來（例如：周，2006；姚，2007；姚、陳，2008；胡，2004；陳，2007、2010；陳、馮，2006；馮，2006；馮、葉，2004；馮、葉、盧，2008；馮、駱，1998；楊，2007；楊、馮，2005；鄧，2000、2004、2010；駱，2000）；（二）學理論述 —— 主旨在釐清一些數學學理上的難點，或是探討教學布置的各種問題（例如：周，2007；周、馮，2007；馮，1999、2004、2007、2008a、2008b、2009、2010；葉、馮，2001、2003；董、李、

馮，2000)。前文提及我在理論層面的貢獻，就是指我會寫一些學理論述的文章，協助教師釐清重要的數學概念和原理，好讓他們能有信心地執行一些他們並不習慣的教學設計。至於工作報告，主要是由施教的教師撰寫，偶然我也會在執筆的過程上加以協助。

從學術研究的角度看，會問數學化教學的研究方法是甚麼？工作有甚麼成果？確立了哪些結論？弗賴登塔爾認為研究教學的人應從思維實驗入手，猜測某種教學過程會衍生怎樣的學生表現，然後進行實踐觀察，嚴謹地論述所有發現（Freudenthal, 1991）。

Observing their thought-experiments and reporting on them would have transformed educational developers into education researchers, who present their findings together with the arguments, rather than dogmatically. (p.158)

如果以今天流行的量化研究方法來評斷，這種工作無法得到具統計普遍性的結論，容易被忽略或邊沿化。弗賴登塔爾堅持質化研究的重要性，並認為量化分析不會帶來很重要的研究成果。

Qualitative research is gaining ground, but we are still far from the point where mathematical methods can add a finishing touch to qualitative knowledge, and many researchers are even farther from the insight that mathematics is not able to do more than just this. (Freudenthal, 1991, p.152)

對於質化研究產出知識的有效性，弗賴登塔爾是這樣理解的：

Knowledge can successfully be presented as a product if the process of its acquisition is reproducible – a characteristic of “hard” science. Whenever this condition is not fulfilled, knowledge presented without any indication of the process that brought it about, lacks all characteristics of rationality that distinguish genuine knowledge from dogma. (Freudenthal, 1991, p.161)

換言之，研究教學的人必須充分論述教學決策的背後理念及假設，交代思維實驗的細節，並試圖解釋實踐所見與教學構想的落差。進入這種設計、實踐、再設計、再實踐的循環，就叫進行「發展性研究」(developmental research)。弗賴登塔爾認為這種研究範式已包含知識確立的機制：

... developmental research means:

experiencing the cyclic process of development and research so consciously, and reporting on it so candidly that it justifies itself, and that this experience can be transmitted to others to become like their own experience.

(Freudenthal, 1991, p.161)

對於從不參與其中的人而言，是很難觸摸發展性研究的實質成果的。既然沒有具統計普遍性的結論，完成了工作，得到的是甚麼呢？答案可以是一些會帶來不錯效果的教學設計，也可以是一套思考和分析教學的方法，甚至可以是一種態度、一種習慣。過去十二年，團隊成員都在不同階段獲得上述各種不同的成果。雖然沒有找到具統計普遍性的結論，但卻可把成員的教學執行能力和分析能力，提高至足以獨立處理各種教學問題，而不必依賴任何具統計普遍性的結論。簡而言之，這種發展性研究的最大作用在於使從業員變得更精明、更幹練，也就是更專業。以下的論述抓著了發展性研究的核心價值：

... an empirical heuristic is a data-based model of educational process. The outcomes of educational research cannot be general laws, but they can be ways of thinking used to challenge and understand educational ideas and practices. ...

Empirical heuristics do not derive their value from correspondence to truth, but from their potential to assist reflection, a function unrelated to truth and falsehood. (St. Clair, 2005, pp. 435-453)

亦師亦友維特曼

德國學者埃里希·維特曼 (Erich Wittmann) 是發展性研究的專家，他

提出應把數學教育作為系統進化的設計科學 (systemic evolutionary design science) 處理，其中設計和運用大量內容豐富的學習環境¹ (substantial learning environment) 應是數學教育研究的核心 (Wittmann, 1995, 2001)。他把弗賴登塔爾藏於字裡行間的進化觀點說個清楚明白，並提出把工程學慣用的設計科學研究範式，用於研發大量內容豐富的學習環境，延續了弗賴登塔爾的工作，及將其發揚光大。

由於彼此均是以弗賴登塔爾的思想作為工作的基礎，而且在多方面的想法皆異常一致，自 2000 年與他在東京認識之後，即一見如故，時常討論教學研究的種種問題。十年來維特曼給了我不少指導和鼓勵，可算亦師亦友。及至 2009 年 5 月，年屆古稀的他更專程來到香港，為團隊打氣，確認了十二載數學化教學的成就。

團隊在設計科學的工作範式之下，產出了不少教學設計，其中不乏內容豐富的學習環境。這種工程學的研究手法，也令團隊開發了一些教具和學具 (李、馮，2009)，修補了數學教學在技術層面的不足。

團隊的營運

儘管參與數學化教學的教師來自不同背景，卻時常有人誤以為他們全部都是我的學生。其實他們都是自發參與，不因為我曾否是他們的老師，也不因為是否校長的要求。各人按自己的需要和興趣參加，快慢自決，進展因人而異。在我看來，團隊成員都是熱愛數學教學的藝術家，總是希望演好自己的教學。彼此之間的互動，促使每年都有機會重複印證或提升舊有的理解，同時也開闢新的戰線，探討新的課題或問題。在這種工作模式之下，經長時間的累積，團隊滾存了一些專業知識，部分已記諸文字，部分卻礙於各人工作超限而仍然未能寫成文章。為了協助後進實踐數學化教學，團隊成員會主持講座或其他形式的教師發展活動 (見香港數學教育學會，2006)，甚至個別授徒。近年有興趣數學化教學的教師與日俱增，令團隊不能再以鬆散的形式繼續運作。藉此數學化教學十二周年，團隊搭建了自己的網站 (www.mathematising.net)。工作基地正式誕生，有助溝通、協作和交換資訊。此外，團隊更引入了內部認證機制，按實踐和推動數學化教學的成就把成員分為隊員、隊目和隊長三級，令工作可制度化地持續發展。

1 前譯作「堅實的學習環境」。

對教育生態的影響

十二年來，整個團隊都在戮力實踐數學化教學，及沉醉於它帶來的滿足感，很少在意別人怎樣看我們的工作。不知這是否藝術家的脾性，也不知這是否實踐主義者的執著。正如弗賴登塔爾所言，解決教育問題的工作不是愛搞理論的人做的，而是參與其中的人做的：

*... problem solving in education is not a job for theoreticians
but for the participants in the educational process.*
(Freudenthal, 1981, p.148)

如果要問數學化教學對香港教育生態的影響，我只能數數十二年來，《數學教育》刊登的文章之中，香港在職小學教師是其中一個作者的有多少。下表是第七期（1998年）至第二十九期（2010年）的統計：

期數	香港在職小學教師發表於 《數學教育》的文章數量	期數	香港在職小學教師發表於 《數學教育》的文章數量
7	0	19	0
8	0	20	2
9	0	21	1
10	0	22	2
11	1	23	1
12	1	24	2
13	2	25	1
14	2	26	3
15	1	27	1
16	0	28	2
17	1	29	2
18	0		

表 一

可以這樣說，自數學化教學出現以來，香港在職小學教師發表於《數學教育》的文章數量比以前增加了。至於當中有否因果關係，就留給想知的人研究好了。

結語

十二年過去，最令人高興的不是從事數學化教學的人可以拿個行政長官卓越教學獎（吳丹和胡志就是拿過這種獎項的團隊成員），也不是看見準教師都在研習數學化教學以應付面試，而是看到很多精彩的數學課在香港的教室出現。這種平凡而簡樸的心情，恐怕不是事事講求評量的人所能理解。

參考資料

- 李婉婷、馮振業（2009）。數學化教學的教具和學具應用。載黃家樂、李玉潔、潘維凱、鄧國俊（編）。《香港數學教育會議 2009 論文集》（頁 93-104）。香港：香港數學教育學會。
- 周惠英（2006）。學生真的認識「因數」嗎？《數學教育》22 期，25-30。
- 周惠英（2007）。數學化教學與常見教學的異同。載梁志強、黎敏兒、潘建強、梁景信（編）。《香港數學教育會議 2007 論文集》（頁 180-188）。香港：香港數學教育學會。
- 周惠英、馮振業（2007）。分數教學的一個難點。《數學教育》25 期，55-57。
- 姚惠瑜（2007）。柱體和錐體的教學。載梁志強、黎敏兒、潘建強、梁景信（編）。《香港數學教育會議 2007 論文集》（頁 189-203）。香港：香港數學教育學會。
- 姚惠瑜、陳麗萍（2008）。數學化教學：圓的認識。《數學教育》26 期，50-57。
- 胡志（2004）。度量教學：經歷數學學習的完整過程。載鄧幹明、黃家樂、李文生、莫雅慈（編）。《香港數學教育會議—2004 論文集》（頁 107-122）。香港：香港大學教育學院。（後收入吳丹（編）（2007）。《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》（頁 149-167）。香港：香港數學教育學會。）
- 香港數學教育學會（2006）。數學化教學系列。於 2010 年 6 月 30 日下載自 <http://www.hkame.org.hk/html/modules/tinyd6/content/2006maths/2006math.htm>
- 陳麗萍（2007）。數學化教學：四邊形。載梁志強、黎敏兒、潘建強、梁景信（編）。《香港數學教育會議 2007 論文集》（頁 87-96）。香港：香港數學教育學會。
- 陳麗萍（2010）。正方體展開圖的另一課。《數學教育》29 期，25-29。
- 陳麗萍、馮振業（2006）。數學化教學：數型。《數學教育》23 期，10-26。
- 馮仲頤（2006）。乘法概念的一次補底教學。《數學教育》23 期，64-70。

- 馮振業 (1999)。數學化教學：從夢想到現實。載黃毅英、黃家鳴 (編)。《基礎數學教育的優化研討會論文集》(頁 4-46)。香港：香港中文大學教育學院課程與教學學系。
- 馮振業 (2004)。數學化教學：理論、實踐與前瞻。載鄧幹明、黃家樂、李文生、莫雅慈 (編)。《香港數學教育會議—2004 論文集》(頁 78-88)。香港：香港大學教育學院。(後收入吳丹 (編)(2007)。《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》(頁 21-36)。香港：香港數學教育學會。)
- 馮振業 (2007)。略述數學化教學的九大關注項目。載梁志強、黎敏兒、潘建強、梁景信 (編)。《香港數學教育會議 2007 論文集》(頁 152-164)。香港：香港數學教育學會。
- 馮振業 (2008a)。小學的數據處理範疇到底教甚麼？《數學教育》26 期，28-38。
- 馮振業 (2008b)。小學帶餘除法的教學。《數學教育》27 期，34-46。
- 馮振業 (2009)。正方體的截面。《數學教育》28 期，20-31。
- 馮振業 (2010)。時間教學的疑難和困擾。《數學教育》29 期，2-9。
- 馮振業、葉嘉慧 (2004)。數學化教學：空間觀念的培養。載鄧幹明、黃家樂、李文生、莫雅慈 (編)。《香港數學教育會議—2004 論文集》(頁 89-96)。香港：香港大學教育學院。(後收入吳丹 (編)(2007)。《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》(頁 188-199)。香港：香港數學教育學會。)
- 馮振業、葉嘉慧、盧錦雄 (2008)。數學化教學：方向系統。《數學教育》26 期，39-49。
- 馮振業、駱瑞萍 (1998)。分數何其難：記一次犯難的掙扎。載《香港數學教育會議 98 論文集》(頁 109-116)。香港：香港中文大學課程與教學學系。(後收入吳丹 (編)(2007)。《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》(頁 226-236)。香港：香港數學教育學會。)
- 楊思敏 (2007)。數學化教學：垂直和平行。載梁志強、黎敏兒、潘建強、梁景信 (編)。《香港數學教育會議 2007 論文集》(頁 173-179)。香港：香港數學教育學會。
- 楊思敏、馮振業 (2005)。數學化教學：整除性檢定。《數學教育》20 期，2-24。(後收入吳丹 (編)(2007)。《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》(頁 200-225)。香港：香港數學教育學會。)
- 葉嘉慧、馮振業 (2001)。「分步除法」的數學原理。《數學教育》13 期，28-33。(後收入吳丹 (編)(2007)。《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》(頁 37-42)。香港：香港數學教育學會。)
- 葉嘉慧、馮振業 (2003)。最大公因數和最小公倍數：以線段表示開創教學空間。《數學教育》17 期，57-62。(後收入吳丹 (編)(2007)。《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》(頁 43-50)。香港：香港數學教育學會。)

- 董麗紅、李蘊珍、馮振業 (2000)。小一長度量度的教學。載梁興強 (編)。《香港數學教育會議 2000 論文集》(頁 102-108)。香港：香港教育學院數學系。(後收入吳丹 (編) (2007)。《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》(頁 237-243)。香港：香港數學教育學會。)
- 鄧佩玉 (2000)。反比例教學。載梁興強 (編)。《香港數學教育會議 2000 論文集》(頁 109-119)。香港：香港教育學院數學系。(後收入吳丹 (編) (2007)。《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》(頁 250-262)。香港：香港數學教育學會。)
- 鄧佩玉 (2004)。小二除法教學。載鄧幹明、黃家樂、李文生、莫雅慈 (編)。《香港數學教育會議—2004 論文集》(頁 123-132)。香港：香港大學教育學院。(後收入吳丹 (編) (2007)。《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》(頁 263-273)。香港：香港數學教育學會。)
- 鄧佩玉 (2010)。小三乘法教學。《數學教育》29 期，10-20。
- 駱瑞萍 (2000)。循環小數。載梁興強 (編)。《香港數學教育會議 2000 論文集》(頁 120-129)。香港：香港教育學院數學系。(後收入吳丹 (編) (2007)。《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》(頁 274-284)。香港：香港數學教育學會。)
- 黃毅英 (1995)。共濟的橋樑。《數學教育》1 期，35-36。
- Bower, G. H., & Hilgard, E. R. (1981). *Theories of learning* (5th ed.). Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Netherlands: Reidel.
- Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 133-150.
- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Pólya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On understanding, learning and teaching problem solving (combined edition)*. New York: John Wiley & Sons. (Original work published 1962)
- St. Clair, R. (2005). Similarity and superunknowns: An essay on the challenges of educational research. *Harvard Educational Review*, 75(4), 435-453.
- Wittmann, E. C. (1995). Mathematics education as a 'design science'. *Educational Studies in Mathematics*, 29(4), 87-106.
- Wittmann, E. C. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 1-20.