一道競賽題的推廣

張贇
甘肅省金昌市一中 737100

已知： $0 < x < y < z < \frac{1}{2}\pi$ ，
試證： $\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z < \frac{1}{2}\pi + 2\sin x\cos y + 2\sin y\cos z$ 。

這是一道 1989 年 Iberoamerican 競賽試題和 1990 年中國國家 IMO 集訓隊測試試題。許多刊物上都曾刊載過此題的證明，本文擬給出此不等式的推廣。

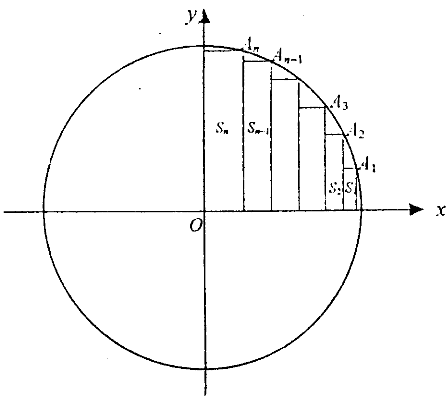
推廣 1 ：若 $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \frac{1}{2}\pi$ ，則 $\sin 2x_1 + \sin 2x_2 + \ldots + \sin 2x_n$
$< \frac{1}{2}\pi + 2\sin x_1\cos x_2 + 2\sin x_2\cos x_3 + \ldots + 2\sin x_{n-1}\cos x_n$ 。

證明：首先將要証明之不等式改寫如下： $\because \sin 2x_1 + \sin 2x_2 + \ldots + \sin 2x_n$
$< \frac{1}{2}\pi + 2\sin x_1\cos x_2 + 2\sin x_2\cos x_3 + \ldots + 2\sin x_{n-1}\cos x_n$

$\Leftrightarrow \sin x_1\cos x_1 + \sin x_2\cos x_2 + \ldots + \sin x_n\cos x_n$
$< \frac{1}{4}\pi + \sin x_1\cos x_2 + \sin x_2\cos x_3 + \ldots + \sin x_{n-1}\cos x_n$

$\Leftrightarrow \sin x_1(\cos x_1 - \cos x_2) + \sin x_2(\cos x_2 - \cos x_3) + \ldots$
$+ \sin x_{n-1}(\cos x_{n-1} - \cos x_n) + \sin x_n\cos x_n < \frac{1}{4}\pi$ 。

如圖，取單位圓 $x^2 + y^2 = 1$ 上的點 $A_1(\cos x_1 , \sin x_1)$, $A_2(\cos x_2 , \sin x_2)$, … , $A_n(\cos x_n , \sin x_n)$，以 S_i $(i = 1 , 2 , \ldots , n)$ 表示圖中長方形的面積，則
$S_1 = \sin x_1(\cos x_1 - \cos x_2)$, $S_2 = \sin x_2(\cos x_2 - \cos x_3)$, … ,
$S_{n-1} = \sin x_{n-1}(\cos x_{n-1} - \cos x_n)$, $S_n = \sin x_n\cos x_n$ 。



那麼 $\sin x_1(\cos x_1 - \cos x_2) + \sin x_2(\cos x_2 - \cos x_3) + \ldots$
$+ \sin x_{n-1}(\cos x_{n-1} - \cos x_n) + \sin x_n\cos x_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ 。

∵ 單位圓在第一象限的扇形面積爲 $\frac{1}{4}\pi$，由圖易知 $S_1 + S_2 + \ldots + S_n < \frac{1}{4}\pi$，

$$\therefore \sin x_1(\cos x_1 - \cos x_2) + \sin x_2(\cos x_2 - \cos x_3) + \ldots + \sin x_{n-1}(\cos x_{n-1} - \cos x_n) + \sin x_n \cos x_n < \tfrac{1}{4}\pi$$

∴ 由前面的結果可知 $\sin 2x_1 + \sin 2x_2 + \ldots + \sin 2x_n$

$$< \tfrac{1}{2}\pi + 2\sin x_1 \cos x_2 + 2\sin x_2 \cos x_3 + \ldots + 2\sin x_{n-1}\cos x_n$$

推廣 2：若 $0 < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_1 < \frac{1}{4}\pi$，則 $\sin 4x_1 + \sin 4x_2 + \ldots + \sin 4x_n$

$$< \tfrac{1}{2}\pi + 2\cos 2x_1 \sin 2x_2 + 2\cos 2x_2 \sin 2x_3 + \ldots + 2\cos 2x_{n-1}\sin 2x_n$$ 。

事實上，由 $0 < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_1 < \frac{1}{4}\pi$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2}\pi - 2x_1 < \frac{1}{2}\pi - 2x_2 < \ldots < \frac{1}{2}\pi - 2x_n < \frac{1}{2}\pi$，用 $\frac{1}{2}\pi - 2x_i$ 換推廣 1 中的 x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ 即可。

推廣 3：若 $0 < x_n < x_{n-1} < \ldots < x_1 < \dfrac{\pi}{2^n}$，則 $\sin 2^n x_1 + \sin 2^n x_2 + \ldots + \sin 2^n x_n$

$$< \tfrac{1}{2}\pi + 2\cos 2^{n-1}x_1 \sin 2^{n-1}x_2 + 2\cos 2^{n-1}x_2 \sin 2^{n-1}x_3 + \ldots + 2\cos 2^{n-1}x_{n-1}\sin 2^{n-1}x_n$$

$(n \geq 2, n \in \mathrm{N})$。

推廣 3 的證明與推廣 2 的證明類同，故留給讀者完成。

---

* 上接第 59 頁 *

又 $PG^2 = AG \cdot BG$，綜合 (3)、(4)、(5) 得

$$\left(\frac{\sqrt{2} - x - y}{x+y}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}\,x}{x+y} \times \frac{\sqrt{2}\,y}{x+y}$$

化簡得 $2 - 2\sqrt{2}(x+y) + x^2 + y^2 = 0$ ...... (6)

$$\therefore\ AE^2 + BF^2 = (\sqrt{2} - y)^2 + (\sqrt{2} - x)^2 = 2 - 2\sqrt{2}(x+y) + x^2 + y^2 + 2$$

由 (6) 式知 $AE^2 + BF^2 = 2 = AB^2$，本題獲証。

此外，還有一種自然的思路，即在圖中半圓上取一點 P' 使 $P'A = AE$，那麼祇要能証明 $BF = P'B$ 即可。但筆者的嘗試沒有成功。

參考文獻

[1] R.A.Johnson《近世幾何學》（邱丕榮譯） 商務印書館 1955 年 6 月第 6 版。