Fermat（分割）定理的「代數法」証明

袁金
安徽師範大學附中

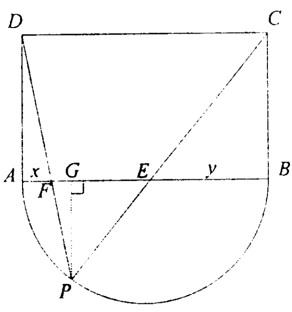
Fermat（分割）定理： 矩形 $ABCD$ 的邊 $AD=\frac{AB}{\sqrt{2}}$，以 AB 爲直徑在矩形之外作半圓，在半圓上任取一點 P，連 PC、PD 交 AB 於 E、F，則：

$$AE^2+BF^2 = AB^2$$

R.A. Johnson 先生在文 [1] 中給出了一個漂亮的 **"福地法"** 証明，本文給出一個代數証法。

証明： 如圖，不失一般性，設 $AD=1$，則 $AB=\sqrt{2}$，
並令 $AF=x$，$BE=y$。
過 P 作 $PG\perp AB$ 交 AB 於 G。因爲 $\Delta PGE\sim\Delta CBE$

於是 $\frac{PG}{BC}=\frac{GE}{BE}$ 即 $\frac{PG}{1}=\frac{GE}{y}$



$\therefore\quad GE=PG\cdot y \quad\ldots\ldots(1)$

同理 $\quad GF=PG\cdot x \quad\ldots\ldots(2)$

$(1)+(2)$ 得 $\quad EF=(x+y)PG$

即 $\quad PG=\frac{EF}{x+y}=\frac{\sqrt{2}-x-y}{x+y} \quad\ldots\ldots(3)$

由 (1)、(2)、(3) 得

$$GE=PG\cdot y=\frac{\sqrt{2}-x-y}{x+y}\cdot y$$

$$GF=PG\cdot x=\frac{\sqrt{2}-x-y}{x+y}\cdot x$$

$$\therefore\quad BG=GE+y=\frac{\sqrt{2}\,y}{x+y} \quad\ldots\ldots(4)$$

$$\text{同理}\quad AG=\frac{\sqrt{2}\,x}{x+y} \quad\ldots\ldots(5)$$

* 下接第 61 頁 *