分數和小數互化定理的推廣

王劍、武海蓬
山東師範大學數學科學學院

首先考察十進位情形下分數和小數的一個互化定理。

定理 若 $0 < a < b$，$(a , b) = 1$，且 $\dfrac{a}{b}$ 可以化為純循環小數。則適合 $10^h \equiv 1 \pmod{b}$ 的最小正整數 h 是迴圈節的長度。

以上定理討論的是 10 進制的特殊情形，考慮一般 n 進制的情形便得到下面的推廣定理。

定理 若 $0 < a < b$，$(a , b) = 1$，且 $\dfrac{a}{b}$ 可以化為 n 進制的純循環小數。則適合 $n^h \equiv 1 \pmod{b}$ 的最小正整數 h 是迴圈節的長度。

證明 設 $\dfrac{a}{b} = 0.\dot{a}_1\ldots\dot{a}_t$，其中 $a_1 , a_2 , \ldots , a_t$ 中，至少有一個不是零。

兩邊乘以 n^t 得：$\dfrac{an^t}{b} = a_1n^{t-1} + a_2n^{t-2} + \ldots + a_{t-1}n + a_t + 0.\dot{a}_1\ldots\dot{a}_t$。

令 $q = a_1n^{t-1} + a_2n^{t-2} + \ldots + a_{t-1}n + a_t$，則有 $\dfrac{an^t}{b} = q + \dfrac{a}{b}$，即 $a(n^t - 1) = bq$，由 $(a , b) = 1$，得到 $b | (n^t - 1)$，這就是 $n^t \equiv 1 \pmod{b}$。
由 h 的定義，知 $h \le t$。

另外，由 $n^h \equiv 1 \pmod{b}$，可得 $\dfrac{an^h}{b} = p + \dfrac{a}{b}$，其中 p 為正整數。 (1)

設 $\dfrac{a}{b} = 0.a_1a_2\ldots a_h\, a_{h+1}\ldots a_{2h}\ldots$。兩邊乘以 n^h 得

$$\frac{an^h}{b} = a_1n^{h-1} + a_2n^{h-2} + \ldots + a_{n-1}n + a_h + 0.a_{h+1}a_{h+2}\ldots a_{2h}\ldots \quad (2)$$

比較 (1) 和 (2) 可得 $0.a_1a_2\ldots a_h\, a_{h+1}\ldots a_{2h}\ldots = 0.a_{h+1}a_{h+2}\ldots a_{2h}\ldots$。由此可知迴圈節的長度最多為 h，即 $t \le h$。綜上可知：$t = h$，證畢。

作者電郵：7676dyj@sina.com