「分數拆分」的探究式教學分析
——關注學生的思維過程

殷勤思
香港教育學院課程與教學學系

引言

分子為 1 的分數稱為單位分數，亦叫埃及分數。把一個分數寫成兩個或兩個以上互不相同的單位分數的和，稱為分數拆分。雖然拆分不是課程要求的內容，但其涉及的知識點，並不超出已掌握分數四則運算的學生的接受範圍，而且拆分運算綜合性較強，解法多種多樣，若在教學中好好運用，便能有效鍛煉學生的分析、綜合、創新等高階思維能力。那對於分數拆分教學，應選擇什麼教學方式呢？若採用傳授式教學，直接向學生講解其演算法則，則令學生失去了一次獨立探索的機會，而且還增加了學生的記憶負擔，降低學習興趣，未必能達到良好的效果。而採用探究式教學，則更有利於發展學生思維（黃家禮 2005）。

探究式教學是指利用問題激發學生思考，讓其在探究的過程中學習並建構知識。探究式教學主要以學生為中心，使其親身體驗解難過程，側重於訓練學生對已有知識的應用、綜合與再創造，從而培養思維能力。在強調學生主導的同時，教師則往往擔當著引導輔助的角色（靳玉樂 2004，張廣祥 2003）。那麼，教師應如何利用分數拆分課題來激發學生思考，訓練學生思維呢？筆者會以一次分數拆分探究式教學記錄做例子，通過分析學生的解難過程來探討此問題。

一、教學設計

此次分數拆分教學安排在連續兩堂課中進行，每堂課 45 分鐘。教學對像是 20 位數學成績較好的中一學生，他們已熟悉分數四則運算，具有探究拆分方法的基礎。教學目的主要是鍛煉學生的思維能力。爲了達到此目的，教學過程可分為以下兩個階段：

1. 開放思維，自主探究

由於拆分方法多樣，所以在教學中先不介紹解題要領，而是鼓勵學生獨立思考，自由嘗試各種方法，鍛煉其自主探索的能力。此外，多樣的解題方法還可反映學生不同的思維深度，有利於教師瞭解學生的思考方式（黃毅英、林智中、黃家鳴、羅浩源和孫旭花（2006））。

2. 發現規律，歸納方法

第二階段主要目的是鍛煉學生尋找規律、歸納總結的能力。讓學生在探究過程中，自己總結解題方法。然後再將問題拓展，讓學生驗證自己總結的方法是否可行，使其達致更深入的理解。

此教學採用的工作紙安排了學生寫草稿的位置，教師便可根據草稿分析學生的解題思路，以瞭解學生的思維過程。

二、教學分析

1. 開放思維，自主探究

讓學生初步接觸 1 的拆分，鼓勵他們一題多解。

題 1　在括號內填入不相同的自然數，使等式成立。

(a) $1=\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}$

(b) $1=\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}$

(c) $1=\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}$

一段時間後，大部分學生都能寫出答案。解題思路有以下幾種情況：

（1）利用減法

很多學生嘗試利用減法來解決拆分問題：將 1 逐步減去較小的單位分數，如此類推，直到最後所得的差為不重複的單位分數。如：

$$\text{第一步：}\quad 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{第二步：}\quad \frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{第三步：}\quad \frac{1}{4}-\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$\text{得：}\quad 1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$$

這種方法體現了學生懂得靈活運用逆運算。但學生遇到最大的問題是：不知減去哪個單位分數，才能使差亦為單位分數的同時，又保證不出現重複加數。有些學生會將單位分數逐次減半，從而得到單位分數的差，但這樣卻會使結果一直出現重複加數（如上述例子中的第一、二步）。經過反思，有些學生會另闢新路，嘗試減去其他單位分數，由此便能得到答案。

（2）利用擴分

有學生嘗試利用擴分對原數進行等值變換，把分子 1 擴大，從而便於將數字拆開。一些學生還發現解題的突破口：先將原數分成兩個單位分數的和，再將其中一個加數分成兩個單位分數的和，如此逐一拆開，操作 n 次後便可將原數拆成 n 個單位分數的和。此法不但容易理解，而且又能得到多種答案。如：

$$\text{將 1 拆開：}\quad 1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$\text{將 }\frac{1}{2}\text{ 拆開：}\quad \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{2}{6}+\frac{1}{6} = \frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

$$\text{得：}\quad 1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

$$\text{將 }\frac{1}{3}\text{ 拆開：}\quad \frac{1}{3} = \frac{4}{12} = \frac{3}{12}+\frac{1}{12} = \frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

$$\text{得：}\quad 1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$$

$$\text{若將 }\frac{1}{6}\text{ 拆開：}\quad \frac{1}{6} = \frac{4}{24} = \frac{3}{24}+\frac{1}{24} = \frac{1}{8}+\frac{1}{24}$$

則得：$1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$

將$\frac{1}{3}$和$\frac{1}{6}$同時拆開，得：$1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}$

觀察學生的草稿，發現他們並不是一下子就想出這些答案，而是在不斷嘗試的過程中摸索出來的。例如有一位學生的草稿是這樣的：

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{12}+\frac{2}{12}=\frac{3}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

由此看出，這位學生在開始探究時，也先分成一樣的加數，而他在嘗試將加數擴分後，便成功地將其分成不同的加數。只要兩個加數的分子均為分母的約數，便可通過約分將加數化成不同的單位分數。可見這學生懂得靈活運用擴分運算，有較強的數字轉換變化能力。

（3）利用裂項求和

有學生巧妙地利用裂項求和來解題。解法如下：

由 $$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} = 1-\frac{1}{4}$$

得 $$1 = (1-\frac{1}{4})+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{4}$$

在裂項求和的基本題型中，各項均為單位分數，由此得到 1 的拆分的一種解法。可見這學生的記憶力、發散性思維、逆向思維與數學綜合能力都比較強。

（4）隨意拼湊

有些學生先隨意地嘗試拼湊，再慢慢調整，從而得到答案。例如：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{24}+\frac{1}{4}=\frac{27}{24}$，結果偏大，調小後得：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}=1$。

這種方法顯然效率較低，難以得到答案，但卻說明這些學生具有一定的探究能力。只要老師給予適當引導，便可使其有所突破。

整體而言，在探究過程中，教師留意著學生的演算草稿，判斷學生遇到的問題和困難，以便給予適當提示與協助。學生主要遇到以下難點：

- 分子為 1 的數難以直接分開。解決這個問題需要學生尋找方法將原數變形。

- 在保證分得的加數為單位分數的同時，又要保證不會出現重複加數。出現重複加數的原因，往往是因為學生受到平均分配的思維習慣影響，沒有抓住「不平均分配」的解題關鍵。

在探究之後，教師挑選一些學生演示他們的解法，實施同儕互評，學生便可在此過程中拓寬思維，明確思路。

2. 發現規律，歸納方法

由第一階段探究可得拆分最基本的步驟，就是把一個單位分數拆成兩個單位分數的和。只要總結出解決這問題的法則，就能輕易解答各式各樣的拆分問題。所以，第二階段的探究活動，主要目的是鍛煉學生的尋找規律的能力，讓學生歸納總結出把一個分數拆成兩個單位分數的和的方法。

題 2　在括號內填入不相同的自然數，使等式成立。

(a) $\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{(\quad)}+\dfrac{1}{(\quad)}$

(b) $\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{(\quad)}+\dfrac{1}{(\quad)}$

(c) $\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{(\quad)}+\dfrac{1}{(\quad)}$

利用減法和拼湊法都具有隨意性，而利用擴分則較易總結出一般的法則。其解題思路有以下幾種情況：

（1）逐步嘗試

部分學生在擴分時，會逐步加一遞增擴分的倍數，不斷嘗試，直到成

功把拆開的兩個分數約成單位分數。如：

$$\underbrace{\frac{1}{5}=\frac{2}{10}=\frac{3}{15}=\cdots}_{\text{不能分成單位分數的和}}=\frac{6}{30}=\frac{5}{30}+\frac{1}{30}=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$$

問題 2 中 $\frac{1}{3}$ 與 $\frac{1}{5}$ 的拆分只有一個答案，而 $\frac{1}{4}$ 的拆分則有兩個答案。在做 $\frac{1}{4}$ 的拆分時，有些敢於嘗試的學生，可算出兩個答案。而有些學生則在找到一個答案後便停止嘗試。教師應向只找到一個答案的學生提問：「想想還有沒有其他答案？」

$$\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{3}{12}=\frac{2}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\text{ ....答案 1}$$

$$=\frac{4}{16}=\frac{5}{20}=\frac{4}{20}+\frac{1}{20}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}\text{ ....答案 2}$$

（2）發現規律

有一些學生會在做前兩題時便發現了規律：在擴分時，只要分子分母同乘的數為原分母加一，則可成功拆分，即：

$$\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n(n+1)}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

但這種方法還未完美，因為他們在用公式做 $\frac{1}{4}$ 的拆分時，往往只找到一個答案。

在讓學生初步嘗試歸納解題規律後，下一步便是加大難度，讓學生做 $\frac{1}{6}$ 的拆分，並要求學生總結找出全部答案的方法。

題 3　在括號內填入不相同的自然數，使等式成立，並找出全部結果。

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}$$

學生基本上都是利用了逐步嘗試的擴分方法。因為題目要求找出所有答案，根據某些學生之前所歸納出的規律只能求得一個答案，並不適用。此外，在逐步擴分的過程中，會出現許多重複答案。如何做到「不重複、不遺漏」，則是難點所在。

另一方面，從學生探究過程可以看出學生的條理性。有些學生隨意選擇擴大的倍數，這樣則易遺漏答案；而有些學生將擴分的倍數逐步加一遞增，這樣不但做到不遺漏，而且便於發現規律：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{6} &= \frac{2}{12} = \frac{1}{12}+\frac{1}{12} && \text{......重複加數}\\
&= \frac{3}{18} = \frac{2}{18}+\frac{1}{18} = \frac{1}{9}+\frac{1}{18} && \text{......答案 1}\\
&= \frac{4}{24} = \frac{3}{24}+\frac{1}{24} = \frac{1}{8}+\frac{1}{24} && \text{......答案 2}\\
&= \frac{5}{30} = \frac{3}{30}+\frac{2}{30} = \frac{1}{10}+\frac{1}{15} && \text{......答案 3}\\
&= \frac{6}{36} = \frac{4}{36}+\frac{2}{36} = \frac{1}{9}+\frac{1}{18} && \text{......與答案 1 重複}\\
&= \frac{7}{42} = \frac{6}{42}+\frac{1}{42} = \frac{1}{7}+\frac{1}{42} && \text{......答案 4}\\
&= \frac{8}{48} = \frac{6}{48}+\frac{2}{48} = \frac{1}{8}+\frac{1}{24} && \text{......與答案 2 重複}\\
&= \frac{9}{54} = \frac{6}{54}+\frac{3}{54} = \frac{1}{9}+\frac{1}{18} && \text{......與答案 1 重複}\\
&= \frac{10}{60} = \frac{6}{60}+\frac{4}{60} = \frac{1}{10}+\frac{1}{15} && \text{......與答案 3 重複}\\
\cdots & \quad \cdots
\end{aligned}
$$

在公佈答案後，下一步便是再次讓學生嘗試對單位分數拆分的方法進行總結。但由於難度較大，教師便循序漸進地引導，讓學生逐步發現解題要領。

第一步先讓學生嘗試總結：「用逐步擴分的方法進行拆分，在什麼情況下會出現重複答案？」有學生發現，擴分時分子分母同乘以 6 或 9 所得到

的答案，與同乘以 3 所得的答案是一樣的，所以初步提出假設：擴分時分子分母同乘以 x 所得的答案，與同乘以 x 的倍數所得的答案是一樣的。這個假設雖不準確，但可以反映規律的一個方面。教師針對此假設舉出反例：

分子分母同乘以 4 可得：$\frac{1}{15}=\frac{4}{60}=\frac{3}{60}+\frac{1}{60}=\frac{1}{20}+\frac{1}{60}$。而根據公式 $\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n(n+1)}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$ 可得：$\frac{1}{15}=\frac{16}{15\times 16}=\frac{1}{16}+\frac{1}{240}$。雖然 16 為 4 的倍數，但卻得到不同的答案，由此說明上述的假設是不準確的。學生在教師引導下，便會更容易得知規律：由於 $3:1\neq 15:1$，即使 16 是 4 的倍數，拆開後加數的比不相同，所以答案不會重複，即「原數若按相同的比例分拆，答案便出現重複。」由此，便可得到不出現重複答案的方法：「*拆開的兩個加數的分子要互質*」。

接著，教師便引導學生找出拆開單位分數為兩個加數的條件。由於這個問題難度也較大，所以教師也給予提示：「大家可以嘗試用字母來表示數字」。根據提示，學生在探究時便有了方向。有一位學生的草稿是這樣寫的：

$$\frac{1}{a}=\frac{n}{an}=\frac{x+y}{a(x+y)}=\frac{x}{a(x+y)}+\frac{y}{a(x+y)}$$

由草稿可看出學生的思路：他首先用 a 來代表原單位分數的分母，用 n 來代表擴分的倍數，但後來卻將其改成用 $x+y$ 來表示，便於表示兩數之和。若要兩個加數能約成單位分數，x 和 y 都要是 $a(x+y)$ 的約數。但由於 x 和 y 互質，所以 x 和 y 均不能和 $x+y$ 約（可用反證法證明，但限於篇幅，並不細寫），所以 x 和 y 只能和 a 約，即 *x 和 y 均為 a 的約數*。

在讓學生嘗試獨立探究之後，教師便揭曉答案，以 $\frac{1}{6}$ 的拆分為例來講解要領，給予將單位分數 $\frac{1}{A}$ 拆成兩個單位分數之和的明確解題步驟：

i. *分解質因數*：先找出 A 的各個約數，列舉出所有互質的約數對 a_1 , a_2
ii. *擴分*：擴分的倍數為兩個約數的和，即 a_1+a_2，得 $\frac{1}{A}=\frac{a_1+a_2}{A(a_1+a_2)}$

iii.　拆開：$\dfrac{1}{A}=\dfrac{a_1}{A(a_1+a_2)}+\dfrac{a_2}{A(a_1+a_2)}$

iv.　約分：$\dfrac{1}{A}=\dfrac{1}{\frac{A}{a_1}(a_1+a_2)}+\dfrac{1}{\frac{A}{a_2}(a_1+a_2)}$

以上題目都是將單位分數拆分，但若原數不是單位分數又應該如何解決呢？由此便可將問題升級，激發學生繼續思考。

題 4　在括號內填入不相同的自然數，使等式成立，並找出全部結果。

$$\frac{4}{15}=\frac{1}{(\quad)}+\frac{1}{(\quad)}$$

學生遵循單位分數拆分的步驟，先找到 15 的約數：1、3、5、15，然後再選取其中兩個互質的約數相加，得：1 + 3 = 4、1 + 5 = 6、3 + 5 = 8、1 + 15 = 16。

再進行擴分、拆開、約分等步驟，從而解出 3 組正確答案。

$$\frac{4}{15}=\frac{1}{5}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6}+\frac{1}{10}=\frac{1}{4}+\frac{1}{60}$$

但只有擴分所乘的數為 6 的時候，無法成功拆分，由此便發現規律：「擴分的倍數可被分子整除，才能使拆開後的加數約成單位分數。」

將最簡真分數 $\dfrac{B}{A}$ 拆成兩個單位分數之和的解題步驟如下：

i.　分解：先找出 A 的各個約數

ii.　湊分子：選取互質的兩個約數 a_1, a_2 使 a_1+a_2 等於 B 的倍數 nB

iii.　擴分：$\dfrac{B}{A}=\dfrac{nB}{nA}$

iv.　拆開：$\dfrac{nB}{nA}=\dfrac{a_1}{nA}+\dfrac{a_2}{nA}$

v.　約分：$\dfrac{B}{A}=\dfrac{1}{\frac{nA}{a_1}}+\dfrac{1}{\frac{nA}{a_2}}$

三、教學建議

探究教學雖以學生為主導，但教師的引導作用不能忽視。從上述拆分教學案例可以看出，教師要在探究式教學中有效激發學生思考並訓練學生的思維，關注學生的思維過程很重要。只是拋出問題，讓學生胡思亂想，未必能讓學生獲得鍛煉，反而可能會令學生建構錯誤的知識。由此提出以下建議：

1. 問題設計要符合學生的思維進程

要能有效地激發學生思考，第一步是需要教師精心設計探究問題。首先，探究題目難度要適中。題目太簡單導致興趣不高；題目太難又使其產生畏懼感。其次，教師需盡量預計學生探究時可能出現的思路，在設置探究問題時，便可配合學生的思維進程，由易到難、由淺入深地安排問題順序，就像是在設計過關遊戲一樣，提升學生對探究的興趣。例如，在上述分數拆分教學中，先讓學生自由探究，然後要求學生嘗試歸納總結，最後再將問題進一步拓展，如此設計符合了探究思維的進程。

2. 實施進展性評估，分析學生的思維

由於探究思維有很強的發散性，教師在設計教學時難以完全預知學生的想法與錯誤。這就需要教師在探究式教學中實施進展性評估，瞭解學生思路，分析學生的思維。這要求教師能通過即時評估，準確判斷學生的程度與問題。教師可四周巡視，通過個別提問或觀察學生的演算來瞭解學生的思路，看學生遇到哪些困難，及時發現錯誤與漏洞，便於協助學生解決。

在上述拆分教學中，教師亦有通過觀察來發現學生在探究時遇到的問題。如：學生容易受到平均分配題型的思路影響，總是分得重複加數。學生還容易「想當然」，總結出片面的結論，認為擴分時分子分母同乘的數為倍數關係時便出現重複答案。教師便可根據評估結果，有針對性地指出學生思維的漏洞，並協助學生衝破思維的瓶頸。

3. 有針對性地作出回饋，引導學生思考

在評估學生的思維情況後，下一步就是要決定如何回饋，才能給予學生有效的引導和輔助。從上述的分數拆分教學看出，回饋需要有針對性，應著重處理探究的難點、疑點，與即場發現的問題。此外，由於每個學生的思維情況、探究思路都未必一樣，所以回饋還要針對學生的具體情況。

在回饋時，可多用提示、提問等啟發性語言，引導學生思考，讓學生自己發現並解決問題。例如，學生在歸納拆分規律時遇到了困難，老師不必直接把答案說出來，而是可以提示學生「用字母來代表數字」。此外，回饋還要注意分量，儘量做到恰到好處，在協助學生解決困難時，為學生創造更多自主思考的空間。

結語

鍛煉學生的思維能力是數學教學的一項重點，但過多採用單一的灌輸與應試訓練卻未必能對發展學生思維取得良好的效果。教師應盡量創造更多機會讓學生獨立思考，鼓勵一題多解，從而提高他們的思維能力，逐漸培養出研究數學的興趣。正如上述的分數拆分探究教學，題目形式雖然很普通，但以此讓學生自我探究，卻能誘發學生放開思維，從而尋找出各種各樣的方法，並嘗試了歸納解題法則。這不正是數學教育希望看到得的嗎？

參考文獻

柯召和孫琦（2003）。《單位分數》。香港：智能教育出版社。

張廣祥（2003）。《數學中的問題探究》。上海：華東師範大學出版社。

黃家禮（2005）。對六年級一節「探究活動」課的設計。《數學教學》，第 10 期，頁 15–17。

黃毅英、林智中、黃家鳴、羅浩源和孫旭花（2006）。傳統數學評價之「缺憾」——以一個租船問題為例。《數學教育學報》，15(3)，頁 8–15。

靳玉樂（2004）。《探究教學的學習與輔導》。北京：中國人事出版社。

作者電郵：peccoyin@163.com