

觀課後記：質數、合成數、矩形數

陳葉祥

香港教育學院數學與資訊科技學系

引言

這是實習老師的小四數學課，教學目的是讓學生認識質數和合成數。老師預備充足、充滿自信，且應用簡報及其他多媒體輔助教學，課堂亦充滿師生對答；但是，當課堂完結時，學生對老師所教授的概念卻是「似明非明」，到底問題出在哪裡？

以下是課堂的大致流程：首先，老師列出幾個數字，要求學生分成兩類，正如老師所料，學生以「單數」和「雙數」作分類。接著，老師問學生：這些數字能否砌成矩形？可能由於某些學生已在補習社學過，所以很快便說出 2×7 之類的答案，但其他未學過的同學卻似乎跟不上。接著，老師舉出更多例子，並利用多媒體把數字分成「可拼砌成矩形的數」和「不可拼砌成矩形的數」，並把前者稱為合成數，後者稱為質數。接著，老師教導學生，透過列出一個數字的因數來分辨它是合成數還是質數：若果那個數只有2個因數（1和自己）就是質數，否則就是合成數。

要有效的分析課堂，我們先要問那一課學生要學到什麼，它的關鍵特徵是什麼；然後，再思考改善的方法（盧敏玲，2009）。

課堂分析

學生要在這節課中學到如何分辨質數和合成數。根據這節課的課堂設計，老師似乎是期望學生透過分析一個數可否拼砌成矩形而決定那個數是合成數還是質數。因此，它的關鍵特徵就是合成數和矩形數的關連，換句話說，矩形數就是合成數的幾何意義。可惜，這節課不能有效地帶出這個關鍵特徵。以下筆者嘗試提出修改這節課的建議。

引入課題

老師先引導學生以「單數」和「雙數」把數字作分類；接著，再告訴學生除了這個分類外，還可以利用能否砌成矩形作為分類。當然，這是可

行的做法，而且老師亦嘗試把課題建基於學生的已有知識之上；但是，「單數」和「雙數」是很好的分類方法（至少是學生熟悉的分類），為什麼要有另一個分類方式呢？

其實，我們可以先給單／雙數一個幾何意思：雙數就是能夠兩個一排的數，而單數就是不能兩個一排的數；跟著，我們可以問學生：「那麼，有哪些數可以三個一排？」這樣，便能自然地帶出 3 的倍數的幾何意義。接著，我們可以繼續問哪些數是可以四個一排、五個一排、…，然後，再引入矩形數就自然得多了。更重要的是，合成數和矩形數的關連差不多已經自自然然地被帶出來了。

課題的發展

既然本節課的關鍵特徵是「矩形數是合成數的幾何意義」，我們便要把一個數字拼砌成矩形的方法跟其對應的因數分解「平行」地處理，學生才能明白兩者的關連所在。

舉個例子：20 可以排成四個一排，如圖一。

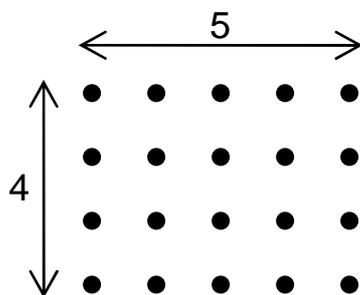


圖 一

當然，這是 $20 = 4 \times 5$ 的幾何解釋。當老師把圖一和它的對應數式以「平行」方式呈現和講解，學生才能明白兩者的關連。還有更關鍵的一點，若果那個數只有 2 個因數（1 和自己）就是質數，否則就是合成數。如何引導學生明白這個定義跟能否把一個數拼砌成矩形拉上關係？還有，怎樣知道一個數是否能夠拼砌成矩形（除了拼成一排之外）？

其實，我們可以跟著上文提出的引入課題方法，有系統地解決以上問題。讓我們繼續以 20 為例。

首先，告訴學生：我們當然可以把 20（其實任何數也可以）拼成一排，如圖二。



圖 二

接著，老師應著學生嘗試把 20 拼成 2 個一排、3 個一排、4 個一排。我們會發現 20 可以拼成 2 個一排和 4 個一排，但不能拼成 3 個一排。與此同時，老師應利用如上文圖一所描述的方法解釋這些拼砌其實分別等同於下列的數式： $20 = 2 \times 10$ 、 $20 = 3 \times 6 + 2$ 、 $20 = 4 \times 5$ 。

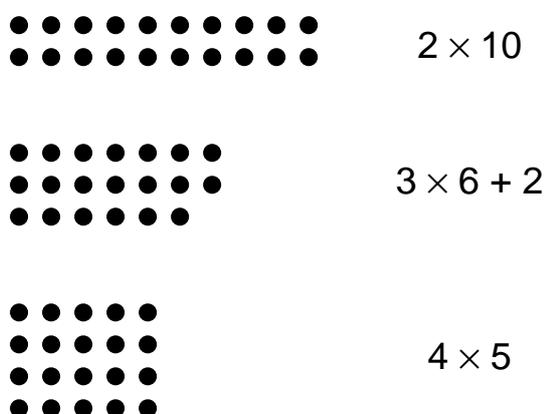


圖 三

接著，我們把圖三作 90 度旋轉（圖四），於是我們得到： $20 = 5 \times 4$ 及 $20 = 10 \times 2$ 的幾何說明；由此，我們可間接地解釋到為何當檢驗一個數 n 是否合成數時，我們只要考慮 n 能否拼成不大於 $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ 一排，亦即是有沒有因數 m 使 $1 < m \leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ 的。當然，若果學生能力較高，老師亦可繼續解釋其實我們只要考慮質因數，並從而再引入「愛氏篩」。但如何適當地引入，就留待讀者自行思考好了。

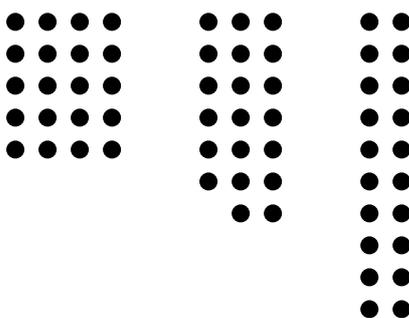


圖 四

總結

筆者嘗試透過以上的例子，說明若在設計課堂前，先弄清楚教學內容的關鍵特徵和知識點之間的關聯，將會更自然和更有效地把課堂的預期學習重點帶出來，讓學生更容易掌握所要學到的概念和內容。

參考文獻

盧敏玲（2009）。有效觀課的三個要素。載《香港教育學院院校協作與學校體驗事務處通訊 2009 年 9 月號》，頁 4－6。

http://www.ied.edu.hk/spfeo/spfeo_newsletter_sep_2009.pdf

作者電郵：mathchan2005@yahoo.com.hk