

## 用計算機？

胡逢亮

民生書院

### 觀察

現今計算機極為普遍，中學生每每人手一部，而且功能強大，一些複雜的運算也只須按數個鍵就可以得到答案。但正因這樣，很多學生變得過分地依賴計算機。曾經見過學生用計算機計算「 $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ 」，步驟如下：先按  $\boxed{1}$   $\boxed{\div}$   $\boxed{3}$   $\boxed{+}$   $\boxed{1}$   $\boxed{\div}$   $\boxed{4}$  及  $\boxed{\text{EXE}}$ （共八個鍵），得答案 0.5833333333，再按  $\boxed{\text{SHIFT}}$   $\boxed{\text{a b/c}}$ （共兩個鍵），然後他便心安理得、心滿意足地將計算機屏幕上顯示的答案「7/12」抄下。更見過學生用計算機計算「 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ 」。當然這些是非常極端的例子，卻並非「個別事件」。問題不單在於費時失事或「殺雞用牛刀」，更嚴重的是：究竟他們知不知道自己正在「做」甚麼？甚麼是計算？數字的意義，是不是計算機輸入和輸出的符號？

為了使學生反思計算機在學習數學的過程中的作用和角色，我曾提出一些題目，並要求學生用計算機找出答案。起初他們都很疑惑，也很興奮，因為我向來鼓勵他們少用計算機。

### 例子

題目 1 比較  $5^{241}$  和  $3^{353}$  的值，哪一個較大？

固然，用一般公開考試核准用的計算機， $5^{241}$  和  $3^{353}$  都會超出輸出的位值，因此不可能直接取得以上兩式的數值，從而不能比較。可是，如果善用計算機中求對數（logarithm）的功能，答案卻是輕易可得。因為  $\log(5^{241}) = 241 \times \log 5 = 168.452 > 168.424 = 353 \times \log 3 = \log(3^{353})$ ，而對數函數是遞增函數（從圖像可以知道），所以  $5^{241} > 3^{353}$ 。由上面的觀察，更可發現，對數事實上大大增加了計算機輸出的位值。

題目 2 求  $878965413 \div 3216$  的餘數。

以上的題目，小六的學生用紙筆就能算出。反而用計算機的話，很多中五的學生也未必懂怎樣獲得答案。由計算機， $878965413 \div 3216$  等於 273310.1409。那麼，餘數在哪兒呢？

步驟如下：先取答案的小數部分，即將 273310.1409 減去 273310，餘下 0.1409，再將該小數部分乘以原來的除數，即  $0.1409 \times 3216$ ，得 453，這就是要求的餘數（實際上因計算機的誤差，答案會在 452.97 和 453.14 之間。可是我們知道答案是整數，而且知道計算機的誤差來自四捨五入，所以取最接近的整數就是答案）。

經驗是很多學生都不明白為甚麼。但只要將寫下式在黑板上，就不用再多解釋：
$$\frac{878965413}{3216} = 273310 + \frac{453}{3216}$$
，於是  $878965413 = 273310 \times 3216 + 453$ 。想想看，這不是「餘式定理」嗎？中五學生是知道的。

題目 3 若  $(5-3\sqrt{2})^6 = a+b\sqrt{2}$ ，其中  $a$  和  $b$  是整數，求  $a$  的值。

這是附加數學二項式定理一課中一道標準及初等的題目。我在即將完結該課時再提出來，只增加一個條件，就是必須用計算機。我再給限制，就是要在兩步內完成。一段時間後，我在黑板上寫上  $(5-3\sqrt{2})^6 = 0.188717346$ 。一陣騷動後（老師在做甚麼！？），我再在上式的正下方寫上  $(5+3\sqrt{2})^6 = 623413.8112$ ，然後將兩者相加，結果是 623414。我說  $a = 623414 \div 2 = 311707$ 。解釋如下：我們知道  $(5-3\sqrt{2})^6$  和  $(5+3\sqrt{2})^6$  的展開是相同的，只差  $(5-3\sqrt{2})^6$  的項是正負交錯出現而  $(5+3\sqrt{2})^6$  的項則全為正，留意  $\sqrt{2}$  也是交錯出現的，於是當  $(5-3\sqrt{2})^6 = a+b\sqrt{2}$  時， $(5+3\sqrt{2})^6 = a-b\sqrt{2}$ 。由此得  $a = ((5-3\sqrt{2})^6 + (5+3\sqrt{2})^6) \div 2$ 。

## 反思

計算機在煩瑣的運算中確實為我們省了不少精力以集中思考，是學習數學的必要工具。但在用計算機之先，對數字的感覺和數學運算的理解，卻必須有充分的預備。計算機不能代替思考。鍵是按了，顯示屏上也出現了「答案」，但最終的判斷還是靠按鍵的人，或者是他的「數學頭腦」。盲目使用工具，只會使人陷入迷惘。計算機在以上數例之所以有所作為，比純粹輸出答案更具「啟發性」、更有「應用價值」，當中全因為我們知道很多（數學知識）。知識與工具，相輔相成，最終能使我們做得更快、知得更多、走得更遠。