EduMath 28 (8/2009)

數學美與數學教育

張僑平
香港中文大學課程與教學系
楊　嫻
湖北省襄樊市穀城欣橋學校

引言

在一堂課堂討論中，老師向學員[1]問到：「數學是藝術還是科學？」。這個問題讓大家有些突然，一方面大家平時的教學很少去關心這樣的問題，另一方面，對「科學」和「藝術」的界定亦是難以辨清，也難以做個二選一的回答。一番討論過後，以「數學是一門科學」的回答居多。它體現在數學中充滿了數字、方程、推理、運算。而主張「數學是藝術」的學員則多提及數學中的幾何圖形和幾何體。亦也有人認為數學既是一門科學也是一門藝術。這是個折衷的回答還是它究竟是如此呢？數學的科學性往往和它系統的知識體系，嚴密的邏輯推理方法，以及真實、準確的結論相聯繫[2]。而數學的藝術性則更多與它千姿百態的圖形相結合。然而，這二者確非決然分割開來。我們無意去界定和辨識何謂科學何為藝術，這樣的討論已經很久也很多。對科學的探索，對藝術的欣賞都會給人不同的感受。何時才會有美感的享受呢？現實的課堂，我們已經聽到太多「數學無趣」或者「數學枯燥」的聲音，數學成為許多學生頭痛的科目，甚至成為學生升學選擇的攔路虎[3]。如能讓學生在學習的過程中，體味到數學帶來的美感，比識別它是科學還是藝術似乎更適合。數學中有美嗎？如果有，它又在哪裡? 什麼是數學美呢？為什麼它是美的？

何謂美？美學專家朱光潛（2006）認為「美生於美感，起源於形象的直覺」（頁 33）。在詞源中，Guralnik（1973）主持编寫的韋氏詞典中解釋

1　這是一個數學教育碩士班的課程，學員均是中、小學數學教師。

2　對數學的真實準確性亦是存在爭議的，詳見 Hellman（2006）。

3　一些學生選擇大學的文科專業就讀，並非真的擅長或喜歡文科專業，而是為逃避數學。

「美是人或事物中給感官以愉悅、提高心靈或精神的某種特質（quality），或這些特質的集合」。M．克萊因（1980）指出，早在古希臘時代，算術、幾何與天文被人看作是心智的藝術與靈魂的音樂，無論是 Plato 還是 Aristotle 都不願把數學和美學分開。作為美的重要因素，秩序和對稱都能夠在數學裡找到。許多數學家亦透過一些比喻來描述數學的美。比如 Russell 曾寫到「數學，如果正確地看，不但擁有真理，而且也有至高的美，正像雕刻的美，是一種冷而嚴肅的美」（Russell, 1917, p.57）；Hardy（1940）也指出「數學家的造型像畫家和詩人的造型一樣，必須美；概念也像色彩或語言一樣，必須和諧一致。美是最首要的標準；不美的數學在世界上是找不到永久容身之地的」（p.85）。無論是音樂、詩篇還是藝術品，其目的都是為了說明數學美的存在。

那麼數學中存在什麼樣的美呢？數學中的各種數字、符號、圖形、公式、定理層出不窮，它們美嗎？數學中亦有數不清的推理和論證，不可以像文學創作一樣，天馬行空地書寫，它們美嗎？長久以來，人們將數學「尊稱」是「思維的體操」。這是對數學教育的某種肯定，卻也將數學教育的功能窄化了。因為，這樣的思維，被單一地看成解題操練、默誦公式、熟記定理，學生遵循著「學概念 —— 做題目 —— 再學概念 —— 再做題目」的循環模式來學習數學。如此以來，覺得枯燥無味也就不為怪了，何來美感呢？

要找尋數學美，並給出一個準確的定義是很難的，不同的數學家都有著自己的美學標準（徐炎章、吳開朗、唐煌、周金才，1998，頁 18 – 22）。克萊因（1980）提出，數學美的基本要素是「和諧、簡單、明確以及秩序」，Hardy（1940）亦提出數學美「有一種高度的意外性、必然性和有機性」。徐利治、王前（1990）則認為「… 能夠被稱為數學美的物件和方法，應該是在具有極度複雜的事物中揭示出極度的簡單性，在極度離散的事物中概括出的極度的統一性（或和諧性），在極度無序的事物中發現的極度的對稱性，在極度平凡的事物中認識到極度的奇異性（新奇性）。」數學美的含義是豐富的，儘管很難定義何謂數學美，我們仍然能夠在諸多提法中看到一些基本的要素，即和諧性、簡潔性與奇異性。

這裡的和諧性主要表現形式是統一、有序、無矛盾以及對稱、對偶等；簡潔性則更多體現在數學語言的精煉，解答的簡單，數學結論的簡潔等；

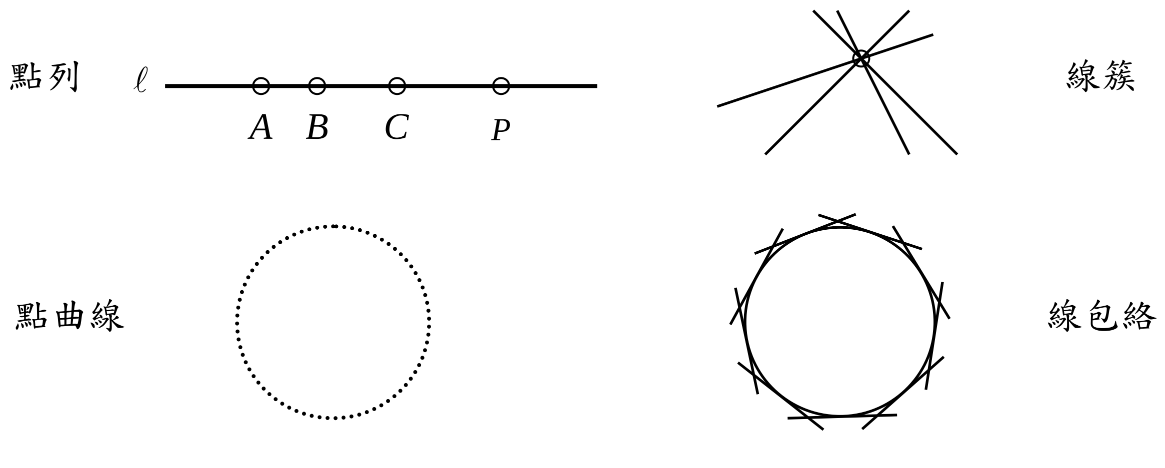
而奇異性則在於數學結論的奇特與新奇。需要注意的是，它們並非決然獨立的在數學裡呈現，更多的是幾種特性的融合。如能在數學中發現這些美的元素並應用於教學，對我們的數學教育無疑大有裨益。下面我們從代數、幾何、三角等領域分別舉出一些具有這些要素的實例。

數學美舉例

歷史上出現的三次數學危機都是由悖論（paradox）引起的（黃毅英，2007），而每一次悖論的解決，都使數學趨向和諧，對每一次危機的討論，也令數學的整個體系更加完備。數學中諸多的對稱、對偶亦可看成是和諧性的另外表現。比如幾何圖形中許多的對稱圖形，諸如等腰三角形、平行四邊形、矩形、正方形等，對稱性是人們對幾何圖形最熟悉的特點（黃毅英，1999），生活中更是有數不清的對稱建築。除幾何圖形外，數字也有著別樣的對稱之美。比如乘法運算中有 $12 \times 231 = 132 \times 21$、$12 \times 462 = 264 \times 21$、$12 \times 693 = 396 \times 21$；再如圖一：

$1 \times 1 = 1$	$1 \times 9 + 2 = 11$
$11 \times 11 = 121$	$12 \times 9 + 3 = 111$
$111 \times 111 = 12321$	$123 \times 9 + 4 = 1111$
$1111 \times 1111 = 1234321$	$1234 \times 9 + 5 = 11111$
$11111 \times 11111 = 123454321$	$12345 \times 9 + 6 = 111111$
$111111 \times 111111 = 12345654321$	$123456 \times 9 + 7 = 1111111$
$1111111 \times 1111111 = 1234567654321$	$1234567 \times 9 + 8 = 11111111$
$11111111 \times 11111111 = 123456787654321$	$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$
$111111111 \times 111111111 = 12345678987654321$	$123456789 \times 9 + 10 = 1111111111$

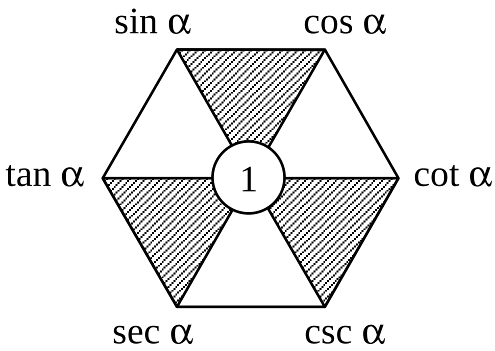
圖一：和諧美之數字的對稱



圖二：和諧美之點線對偶

點、線、面是歐氏幾何中的基本元素。點具備的性質線也同樣具有，二者構成對偶（duality）。如「點列組成直綫，線簇交於一點」,「經過兩點可以作唯一一條直綫，兩條直綫有唯一的一個交點」。又如，圓周既可以看作點的軌跡，也可以理解為線的包絡（見圖二）。

數學和諧之美還可體現在數學的統一性中。例如，三角函數名目眾多，關係複雜，倘若借助一個簡單的六邊形，圍繞著數位 1，便可以將同一個角的六種不同的三角函數聯繫起來（見圖三）。



圖三：和諧美之三角函數的統一

圖三中關係更可概括為三個短句：

下為上方和（陰影三角形中，比如 $1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$、$\sec^2\alpha = \tan^2\alpha + 1$）；

前為兩後商（六邊形各頂點上，比如 $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$、$\sec\alpha = \dfrac{\tan\alpha}{\sin\alpha}$）；

中為兩鄰積（六邊形對角綫上，比如 $\tan\alpha \times \cot\alpha = 1$、$\sin\alpha \times \csc\alpha = 1$）。

常見的圖形面積公式眾多：三角形的面積公式（$S = \dfrac{1}{2}ah$）、正方形的面積公式（$S = a^2$）、長方形的面積公式（$S = ah$）等。而梯形的面積公式（$S = \dfrac{1}{2}(a+b)h$），則可囊括上述幾個公式；而稜（圓）柱、稜（圓）錐及稜（圓）台的體積計算可統一為：$V = \dfrac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S')$，其中 h 為幾何體的高，S 和 S'分別為幾何體的上、下底面的面積。再進一步，柱、錐、台、球的體積公式還可以統一為 Simpson 公式，也被稱為萬能體積公式（omnipotent volume formula）：$V = \dfrac{1}{6}h(S + 4S_0 + S')$，其中 S_0是幾何體

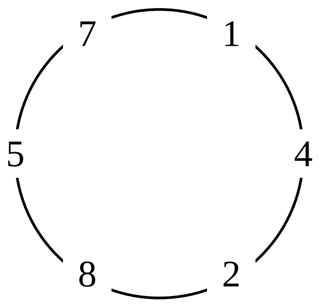
的中截面的面積。

這樣的統一其實體現出了數學的和諧：在諸多看似形異的背後，蘊涵著共同的屬性。對和諧的追求，也幫助我們引出許多對立又統一的概念，諸如由加法理解減法，由乘法理解除法，由正數理解負數，由乘方理解開方，及至有理數與無理數、實數與虛數、指數與對數、微分與積分。

統一也體現出了數學的簡潔之美。一個簡單的結論可以融合諸多的知識要點：例如，簡潔的 Newton-Leibniz 公式 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ 將微分與積分完美的結合起來；大數學家歐拉（Euler）提出凸多面體的邊數（E）、頂點數（V）和面數（F）之間存在著 $F - E + V = 2$ 的關係；著名的歐拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$，把三角函數的定義域拓展到複數，將複指數函數與三角函數統一起來（徐五光，1994）。這個看似簡單的表達有著深遠的意義。更為有趣地是，在 $\theta = \pi$ 的時候，得到等式 $e^{i\pi} + 1 = 0$，它將中學數學中重要的基本元 0、1，超越數 π、e，以及複數 i 巧妙地聯繫起來，而其中的基本運算是加法和乘法，幾乎所有的三角函數公式都可以由它推出！無怪乎諾貝爾物理獎獲得者費曼（Feynman）稱之為數學第一公式（景乃桓，2007）[4]。簡潔之中又蘊涵著和諧！數學的美妙確是多種美感的融合！

數學美的奇異性，多在於一些不平常的關係讓人產生愉悅的驚奇。因為奇異，使人們對數學產生了神秘，也產生了敬意。沒有奇異性，也就不會存在與眾不同的美。例如，神奇的數字 142857，如果將它按照圖四放置，從中任何一個位置斷開，按順時針方向得到的新六位數，都可以由原六位數 142857 與 1 至 6 以內的數字相乘得到。

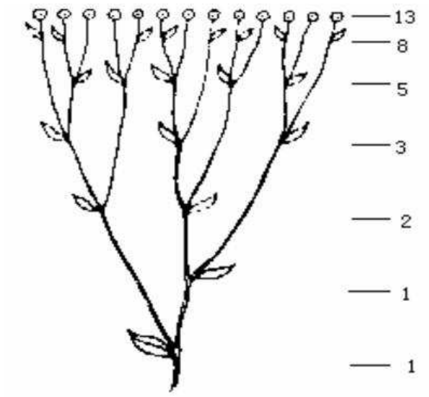
$$
\begin{aligned}
142857 \times 1 &= 142857\\
142857 \times 2 &= 285714\\
142857 \times 3 &= 428571\\
142857 \times 4 &= 571428\\
142857 \times 5 &= 714285\\
142857 \times 6 &= 857142
\end{aligned}
$$



圖四：神奇數 142857

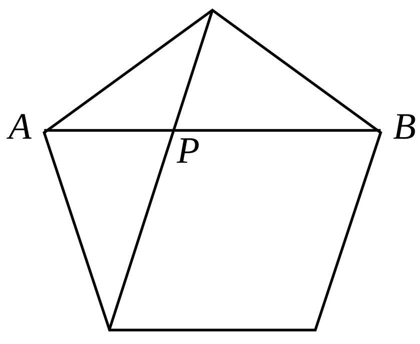
4 亦有學者認爲，恒等式 $e^{i\pi} + 1 = 0$ 因爲太明顯，談不上美（Wells, 1990）。

再如，有四個（比 1 大的）數是它們各位數字的立方和：$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$、$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$、$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$、$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$。多接觸這些奇特的事例，會讓我們的課堂多一些數學的歡樂。有些奇特的事實，則不單單是娛樂。神奇的數列：1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , … 從第三項起，任何一個數都是前面兩數之和，被稱為斐波那契數列（Fibonacci Sequence）。它可以描述雄蜂家系的分佈（徐炎章等，1998，頁 72），可以刻畫植物的生長（見圖五）。



圖五：植物生長的 Fibonacci 數

神奇的比值 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$（≈ 0.618）被稱為黃金分割數（Golden Number）。它既是方程 $x^2 + x - 1 = 0$ 的正根，它也是 $x = \frac{1}{1+x}$ 無窮反覆運算的結果（徐炎章等，1998，頁 64）：$x = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}} \approx 0.618$。在正五邊形中它有了自己的位置：（見圖六）$AP : PB = PB : AB = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$。



圖六：正五邊形中的黃金分割

而斐波那契數列（Fibonacci Sequence）每一項與後一項的比值越來越接近黃金分割數 0.618，也有學者發現斐波那契數列與 Pascal 三角存在著聯繫（傅海倫、石玉華、陳煥法，2003）。數學的奇異，有的只是增加學習的樂趣，有的卻可以將多種數學知識縱貫聯繫。可見，奇異之間竟又蘊含著和諧統一！

數學美、數學教學、數學教育

以上所舉出的只是數學美實例的一二，有興趣的讀者可參閱易南軒（2004）、吳振奎（2004）和 Ball（1947）等。數學中充滿著生動有趣的事例，怎會「枯燥、乏味」呢？這就關乎到如何將數學中的美引入課堂，如何讓學生獲得數學美的審美能力，為學生搭建一座欣賞數學的橋樑。它不僅僅是課堂教學的需要，而且也真正是我們數學教育要到達的目的之一。

各個國家數學課程標準都不同程度的強調數學的美育功能（孫曉天，2003，頁 180 – 315），它們主要是將欣賞數學之美作為課程的文化目的（黃毅英、黃家鳴，1998）。課程文件的重視與教師的意識固然需要，在課堂教學中如何呈現數學之美更為重要。

如若只是展示數學中美的元素讓學生欣賞（如圖一、圖四），它可能帶來學習中的愉快，學生感受的是一種淺層次的美。當然這樣本身已經很有意義，正如 G · 波利亞（1987）所說，「數學教師的責任就是使學生相信數學是有趣的」（頁 478）。不過，有效的學習除了讓學生對所學習的材料感興趣，更期望學生能在學習活動中找到樂趣。Eisner 曾提出「審美式認知提供了一種不同視角來感知學科知識和現實生活」（Eisner，1985）。將數學美作為啓發學生學習數學的動機的一種途徑，需要教師有效的鋪陳學習材料，帶領學生經歷不同層次的數學美。

以多位數的乘法為例，教師在教授時未見得會選擇像圖一、圖四如此複雜數位進行教學，但給學生添加這些「課本之外」卻又是「數學之內」的「佐料」，未嘗不可。添加的方式卻又需考量，不經過加工地單純引入，只能達到淺層的欣賞。如經歷下列教學鋪陳過程將更勝直接給學生呈現：

教師舉出兩組實例	→	學生自行動手推測	→	毋須計算說出結果	→	口頭總結運算規律

又如圖二，倘若能將點和線對等起來，作為幾何的基本元素，即涉及到射影幾何（projective geometry）中的「對偶原理」（duality principle）。拓展學生的視野，由此還可帶出諸如「過點作直線，在直線上取點」，「三線共點問題轉化成三點共線」等對偶命題（dual propositions），更可將集合中的並集（$\cup$）和交集（$\cap$），或者空集（$\varnothing$）和全集（$\mathbf{U}$）結合起來。

再如，融合數學和諧與簡潔之美的 Newton-Leibniz 公式在中學教學裏亦有體現：比如我們教授幾何經歷的是一個從線到面，從面到體，維度不斷增加的過程；另一方面，對球體體積的微分得其表面積（$\frac{4}{3}\pi r^3 \to \pi r^2$），對圓的面積的微分得其周長（$\pi r^2 \to 2\pi r$），這又是一個不斷降低維度的過程。

教師透過有機地鋪陳數學知識，引領著學生的數學「觸角」四處延伸，數學的趣味也就躍然紙上、浮現眼前。除了欣賞數學結果之美，學生在探索與發現的過程，其數學思維得以極大地拓展，如同經歷一場美的體驗歷程。學生既看到了「作為製成品的數學」，也體會到「製作過程中的數學」（Siu & Siu，1979）。這應是數學教學所帶出的深層數學美，也是數學教育真正達到的目標。

結論

正如篇首所言，我們不是對數學「是藝術還是科學」做出一個評判，而是由此帶出數學教育中應突現的數學美感。即便是可以歸類劃分，數學美也是同屬於科學與藝術的。數學美的含意是豐富的，「如數學概念的簡單性、統一性，結構系統的協調性、對稱性，數學命題和數學模型的概括性、典型性和普遍性，還有數學的奇異性都是數學美的具體內容」（徐利治、王前，1990，頁 72）。這就「如同什麼是一首美麗的詩，我們可能不很清楚，但這並不妨礙我們讀詩時去欣賞 …… 它是一種形式高度抽象的美，一種只有親臨數學活動過程才能體驗得到的內在美。這是一種邏輯形式、結構與證明的美，一種只有經過長期艱苦探索之後才能領略的美」（Hardy，1940）。

數學美固然重要，但現時的課堂呈現更多的是數學的「枯燥與乏味」。Phillips（1996）指出「小學生，甚至是大學生中，都因為認識不到數學的

美，而影響到數學學習的態度和學習成績。他們或者認為數學根本不美，沒有學習的興趣，或者認為數學無用，不值得學習和研究」。儘管對數學美的欣賞已經成為各地數學課程的課程目標之一，但將它有效地引入課堂教學仍有待我們教師去探尋。

將數學史引入課堂（Fung & Wong，1998；黃毅英，2004），設計數學遊戲 、模型製作（黃毅英，1997，頁 229 – 230，232 – 246；Dienes，2004）和數學活動（如畫統計圖、擲硬幣實驗、作對稱圖形、展開和截取幾何體，驗證畢氏定理，進行平行和旋轉變換等），都是課堂教學呈現數學美的好方法。然而，僅僅讓學生感受形式的美，獲得淺層的美感是不夠的。學生在「做數學」的過程中感受到的數學美，會比僅僅是觀察和教師講授獲得的深刻得多。張奠宙、木振武（2001）曾提出，學生經歷數學美的歷程有四個層次：美觀、美好、美妙、完美。我們的課堂教學應體現數學美的不同層次。學生透過數學思考（mathematics thinking）、數學問題解決（problem solving）和數學探究（mathematics exploring）去體會、感應和接受數學的巧妙、精緻，領略深層次的數學美，甚至應用並創造數學美，進而體會數學的本質。

不過，這種複雜的程度的選擇和應用，不能忽視學生自身的數學能力，亦即需要照顧學生的認知基礎。在數學家和數學教師眼中美的實例未必學生就能感受得到。故此，數學美的教育還應該立足學生，適合學生的認識基礎和思維特徵，量力為之。否則教師只落得個唱「獨角戲」的份，曲高而和寡。

數學教育的目的，除了傳播知識，培養能力，還應該使數學的潛在價值（文化價值）得到進一步地擴展和滲透。這種拓展需要只有學生獲得深層次的數學美感體驗，才能真正達到數學教育的文化功能。

注： 本文寫作過程中，香港中文大學課程與教學系黃毅英教授曾給出了許多寶貴的意見，謹此鳴謝。

參考文獻

方延明（2004）。數字與美。《教師博覽》，第 1 期，頁 48 – 49。

朱光潛（2006）。《談美》。桂林：廣西師範大學出版社。

克萊因（M. Kline）（1980）。《古今數學思想》（張理京、張錦炎譯）。上海：上海科學技術出版社。

吳振奎（2004）。《數學中的美》。上海：上海教育出版社。

杜書傑（1999）。三角函數中的數學美及其價值初探。《中學數學教學參考》，第 7 期，頁 23 – 26。

易南軒（2004）。《數學美拾趣》。北京：科學出版社。

波利亞（G. Polya）（1987）。《數學的發現》第二卷（歐陽絳譯）。北京：科學出版社。

香港課程發展議會（編訂）（2002）。《數學教育學習領域課程指引》。香港：香港教育署課程發展處。

孫曉天（2003）。《數學課程發展的國際視野》。北京：高等教育出版社。

徐五光（1994）。數學美與數學的統一美。《杭州師範學院學報》，第 3 期，頁 39 – 46。

徐利治、王前（1990）。《數學與思維》。長沙：湖南教育出版社 。

徐利治、徐本順（1997）。數學美與數學教學中的審美。《山東教育》，第 11 期，頁 30 – 35。

徐炎章、吳開朗、唐煌、周金才（1998）。《數學美學思想史》。臺北：曉園出版社。

梅向明、劉增賢（2000）。《高等幾何》。北京：高等教育出版社。

景乃桓（2007）。紀念數學家歐拉誕辰三百周年。《中學數學》，第 3 期，頁 1 – 2。

傅海倫、石玉華、陳煥法（2003）。從「賈憲三角」談起。《高等數學研究》，第 6 卷第 2 期，頁 53 – 56。

黃毅英（1997）。《邁向大眾數學的數學教育》。臺北：九章出版社。

黃毅英（1999）。數學與美育。載黃素蘭（編），《美術教育：研究與視野》。（頁 203 – 207）。香港：香港美術教育協會。

黃毅英（2004）。把數學史引進數學教學真是那麼困難嗎？ 《數學教育期刊》，第 41 期，頁 7 – 15。

黃毅英（2007）。三次數學危機 —— 個人認知與體會。《中學數學教學研究》，第 2 期，頁 7 – 10。

黃毅英、黃家鳴（1998）。十地區數學教育課程標準。《數學傳播》，第 21 卷第 2 期，頁 28 – 41。

張奠宙、木振武（2001）。 數學美與課堂教學。 《數學教育學報》，第 4 期，頁 1 – 3。

Ball, W. W. R. (1947). *Mathematical recreations & essays*. New York: MacMillan.

Dienes, Z. P. (2004). *Mathematics as an Art Form*. Retrieved June 10, 2009, from http://www.zoltandienes.com.

Eisner, E. (1985). Aesthetic Modes of Knowing. In E. Eisner (ed.), *Learning and Teaching the Ways of* Knowing*: Eighty-fourth yearbook of the Society for the Study of Education* (pp. 180 – 315). Chicago: University of Chicago Press.

Fung, C. I. & Wong, N. Y. (1998). Conceptions though the development of mathematical ideas: The case of solution to high degree polynomial equations in medieval Chinese mathematics. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 6, 71 – 88.

Guralnik, D. B. (Ed.) (1973). *Webster's new world dictionary of the American language*. New York: Popular Library

Hardy, G. H. (1940). *A mathematician's apology*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Hellman, H. (2006). *Great feuds in mathematics: Ten of the liveliest disputes ever*. Hoboken, N.J.: John Wiley.

Phillips, J. D. (1996). Aesthetic mathematics: Does mathematics have to be justified by its usefulness? *Australian Mathematics Teach*er. *52*(2), 14 – 18.

Russell, B. (1917). *Mysticism and Log*ic. New York: Doubleday.

Siu, F. K. & Siu, M. K. (1979). History of mathematics and its relation to mathematics education. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 10*(4), 561 – 567.

Wells, D. (1990). Are these the most beautiful? *The Mathematical Intelligencer*, *12*(3), 37 – 41.

作者電郵： qpzhang@cuhk.edu.hk
sunshinehhh@tom.com