謎題一則：運用數學思維的例子

蕭文強
香港大學數學系

引言

每年十二月中旬便收到德國友人 Erich Wittmann 傳來的聖誕謎題，內容只涉及小學數學，從中引發的數學思維，卻往往很富教育意味。

去年（2008）的謎題是這樣子的：在 3×3 方格邊緣的八個格內填上 1 至 8，每個數只用一次，使每個角上那三格內的數加起來都是同樣大，找出全部解。例如圖一(a) 是一個解，每個角上那三格內的數加起來是 12。圖一(b) 不是一個解，因為左上角那三格內的數加起來是 11，另外三個角上那三格內的數加起來是 12。

4	6	5
2		1
7	3	8

(a)

4	5	6
2		1
7	3	8

(b)

圖　一

蠻幹乎？

不作任何思考只憑蠻幹，把 1 至 8 按不同次序放在八個格內驗證對錯，需要 40320（= 8!）次試驗。運用幾何變換的數學思維，便知道從每一個解通過旋轉或鏡像得出八個解（見圖二），因此只需要 $40320 \div 8 = 5040$ 次試驗。以下我們看看如何借助各式各樣的數學思維，把試驗次數越減越少。空言數學思維流於泛泛而談，最好還是以實例作說明，讓我就利用這則謎題討論數學思維。除了解決問題之外，數學思維也幫助我們對問題瞭解得更加透徹。

8	1	5
3		6
7	2	4

7	3	8
2		1
4	6	5

4	2	7
6		3
5	1	8

5	6	4
1		2
8	3	7

7	2	4
3		6
8	1	5

4	6	5
2		1
7	3	8

5	1	8
6		3
4	2	7

8	3	7
1		2
5	6	4

圖　二

<u>第一步</u>

數學思維幫助我們瞭解問題，把已知條件梳理，與要求的解聯繫起來，設法尋找兩者之間的數學關係。不想蠻幹，便得先行佈置一下。

讓我們引進少許記號以輔助理解，熟悉代數的讀者對此當然不會感到陌生，不諳代數的讀者亦毋須迴避。引進記號是語言上增添方便而已，並沒有要求讀者用到較繁複的解方程技巧。把八個格內的數依著順時針方向記作 a、x、b、y、c、w、d、z，其中左上角的數是 a（見圖三）。

a	x	b
z		y
d	w	c

圖　三

由題意得知 $x + b + y = y + c + w = w + d + z = z + a + x = S$
和 $a + x + b + y + c + w + d + z = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$。
因此 $4S = a + b + c + d + 2(x + y + w + z) = 36 + (x + y + w + z)$，
即是 $x + y + w + z = 4(S - 9)$ 是 4 的倍數。
注意到 $10 = 1 + 2 + 3 + 4 \le x + y + w + z \le 5 + 6 + 7 + 8 = 26$，便知道 $x + y + w + z$ 只能是 12、16、20 或 24，相應於 S 是 12、13、14 或 15。

如果 $x + y + w + z = 12$，那些 x、y、w、z 可以是什麼呢？計算一下，便知道 $\{x, y, w, z\} = \{1, 2, 3, 6\}$ 或 $\{1, 2, 4, 5\}$。譬如設 $\{x, y, w, z\} = \{1, 2, 3, 6\}$，要試驗以下的三種情況（見圖四(a)、(b)、(c)）孰為解，只須利用 $S = 12$ 計算四個角的格內的數，需要 3 次試驗。

	1	
3		6
	2	

(a)

	1	
2		6
	3	

(b)

	1	
2		3
	6	

(c)

圖　四

連帶 $\{x, y, w, z\} = \{1, 2, 4, 5\}$，共需要 6 次試驗。類似地，如果 $x + y + w + z = 16$，可以知道 $\{x, y, w, z\} = \{1, 2, 5, 8\}$、$\{1, 2, 6, 7\}$、$\{1, 3, 4, 8\}$、$\{1, 3, 5, 7\}$、$\{1, 4, 5, 6\}$、$\{2, 3, 4, 7\}$ 或 $\{2, 3, 5, 6\}$ 共需要 $3 \times 7 = 21$ 次試驗。如果對 $x + y + w + z = 20$ 和 $x + y + w + z = 24$ 的情況也進行類似的工作，分別需要 21 次和 6 次試驗。總括而言，一共需要 $6 + 21 + 21 + 6 = 54$ 次試驗，比較 5040 次是少得多！

第二步

其實，運用多一點數學思維，利用對偶性質（duality），馬上可以把工作減半。如果 (a, x, b, y, c, w, d, z) 是一個解，而每個角的和是 S，則 $(9-a, 9-x, 9-b, 9-y, 9-c, 9-w, 9-d, 9-z)$ 也是一個解，每個角的和是 $27 - S$。因此，我們只用審視 $S = 12$ 和 $S = 13$ 的情況，把得到的解按照上述方式變換，便分別得到 $S = 15$ 和 $S = 14$ 的解了。於是，只需要 $6 + 21 = 27$ 次試驗。

讓我們再運用多一點數學思維。

注意到 $36 = a + c + (x + b + y) + (w + d + z) = a + c + 2S$

和 $36 = b + d + (z + a + x) + (y + c + w) = b + d + 2S$，

便知道 $a + c = b + d = 2(18 - S)$（這一步妙着，由日本數學家浪川幸彥（Yukihiko Namikawa）提供）。所以，$a + c = b + d$ 只能是 12、10、8 或 6，視乎 S 是 12、13、14 或 15。於是，我們只用考慮：(i) $a + c = b + d = 12$（即

$S = 12$），(ii) $a + c = b + d = 10$（即 $S = 13$）。在 (i) 的情況，a、b、c、d 均大於 3，只能是 $\{a, b, c, d\} = \{4, 5, 7, 8\}$，亦即是 $\{x, y, w, z\} = \{1, 2, 3, 6\}$。在 (ii) 的情況，$a$、$b$、$c$、$d$ 均大於 1，只能是 $\{a, b, c, d\} = \{2, 3, 7, 8\}$、$\{2, 4, 6, 8\}$ 或 $\{3, 4, 6, 7\}$，亦即是 $\{x, y, w, z\} = \{1, 4, 5, 6\}$、$\{1, 3, 5, 7\}$ 或 $\{1, 2, 5, 8\}$。按照之前的敘述，只需要 $3 \times 1 + 3 \times 3 = 12$ 次試驗，比較之前的 27 次試驗又再省一半。

尾聲

全部 12 次試驗都做過後，便會發現有三個解，如圖五(a)、(b)、(c) 所示。

8	1	5
3		6
7	2	4

(a)

8	1	7
4		5
3	6	2

(b)

7	1	4
5		8
6	2	3

(c)

圖　五

把每個數從 9 減掉，便得到另外三個解，如圖六(a)、(b)、(c) 所示。

1	8	4
6		3
2	7	5

(a)

1	8	2
5		4
6	3	7

(b)

2	8	5
4		1
3	7	6

(c)

圖　六

如果你不介意把通過旋轉或鏡像得來的解看成是相同解，這六個便是全部的解了。

還有一點美中不足，就是 $S = 12$ 只有一個解（圖五(a)），$S = 13$ 卻有兩個解（圖五(b) 和 (c)），箇中有沒有玄機呢？當 $S = 12$，$\{x, y, w, z\} = \{1, 2, 3, 6\}$，三個可能情況中（圖四(a)、(b)、(c)）只有一個是解。當 $S =$

13，$\{x, y, w, z\}$ 卻有三個情況，有沒有什麼內在原因使我們可以再排除其中的一些情況呢？

讓我們再運用另外一點數學思維，考慮 $\{x, y, w, z\}$ 和 $\{a, b, c, d\}$ 的奇偶性質（even-odd parity），看看有沒有幫助？當 $S = 12$，x、y、w、z 是二奇二偶，故 a、b、c、d 也是二奇二偶。能夠導致有解的情況必須是圖四(a) 或 (c)，絕對不會是圖四(b)，否則四個角的格內的數必全為奇。結果，只有圖四(a) 導致解。當 $S = 13$，x、y、w、z 必須也是二奇二偶，不能像 $\{x, y, w, z\} = \{1, 3, 5, 7\}$ 那樣全為奇，否則四個角的格內的數也全為奇，是個矛盾（見圖七）。因此，只剩下 $\{x, y, w, z\} = \{1, 4, 5, 6\}$ 或 $\{1, 2, 5, 8\}$，每種情況只須要試驗兩次，每種情況導致一個解。

a	奇	b
奇		奇
d	奇	c

圖七：$S = 13$，故 a、b、c、d 均為奇。

總括而言，其實我們只需要 6 次試驗，其中三次導致解。比起不作思考的蠻幹，試驗 6 次的工夫，只是試驗 40320 次的六千七百二十份之一。不過，減少試驗次數還不是最重要的一點，用電腦驗算 40320 次所花的時間，很可能比較花在上述推理過程來得短！但從電腦驗算 40320 次得到答案，並沒有令我們對問題多瞭解了什麼。通過數學思維得到答案，我們感覺較良好，明白為何大部份情況都不可能導致解，剩下的都導致解。當中涉及數字性質、對偶性質、奇偶性質，都是有理可循的。面對一個數學問題，除了尋找答案之外，我們還希望知道「孰以致之」（“what clicks?”）。

作者電郵： mathsiu@hkucc.hku.hk