# 正方體的截面

馮振業
香港教育學院數學與資訊科技學系

## 引言

目前香港小學六年級的課程，包括「認識柱體、錐體和球體的不同截面」(香港課程發展議會，2000，頁 44)。這課題對提高學生的空間想像力很有幫助，不過要教得出色卻十分困難。難處之一在於教師自己也不清楚截面可能出現哪些平面圖形，以及在怎樣的切割方向下出現；難處之二在於不知如何協助學生理解三維空間的幾何體，以至它們之間的關係。三類立體圖形以球體最簡單，全部截面都是圓形，只是半徑大小不同而已。其餘柱體和錐體，都夾雜不少變化，非三言兩語可以說得明白。本文收窄討論範圍，集中考慮角柱體的一個非常特殊的情況 —— 正方體。

## 試誤找出正方體的截面

如果我們沒有豆腐、涼粉或芝士磚等可供刀子輕易切開的東西，就很難藉真實的切割找到正方體的截面。沒有了真實的切割，各人憑空想像，確認答案的步驟，便欠缺了客觀的標準。有些人採用以液體注入透明正方體的方法來講解，那不失為權宜之計，然而，要以此探討所有情況，就得不時調整液體的體積，相當費時。再者，肉眼從液體表面看出來的截面，其幾何特性不易檢測，最後可能流於權威說了作實。

這裡介紹立體動態幾何軟件 Cabri 3D® (2.0 版)，或許可以克服上述困難。在這個動態平台上，除了可以直接揭示角柱體的截面，還可幫助探討切割位置的改變對截面形狀的影響。例如以圖 1 的平面切割正方體，就可以 Cabri 3D® 展示切割得出的截面(圖 1A)。如果切割平面由圖 2 的三個黑點定義，只要移動這些點，就會看到切割平面隨之改變 (圖 3、4)，所得的截面亦相應地改變 (圖 2A、3A、4A)。最有趣的，就是可以看清這個變化的過程，而非只是看到硬照。軟件還容許改變觀察角度(圖 2B、3B、4B)，讓大家可以自由地看個清楚明白。有時或許需要測量長度或角度，以檢定圖形的屬性。軟件備有測量選單，可得出長度和角度 (圖 8B、10B、11B、 12A）。為了方便解說，本文的其他截面硬照，都以三個黑點定義切割平面，而且以圖 *m*A 表示圖 *m* 的相應截面，圖 *m*B 表示改變視點後的圖 *m*A。

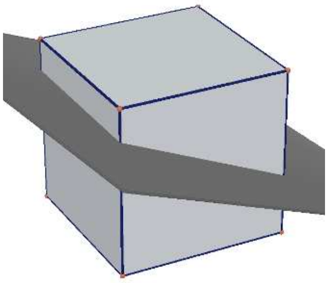

圖　1

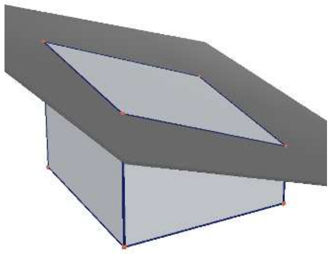

圖　1A

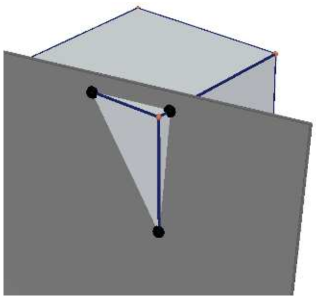

圖　2

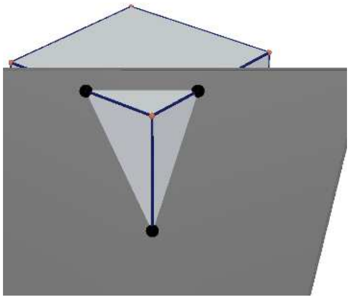

圖　3

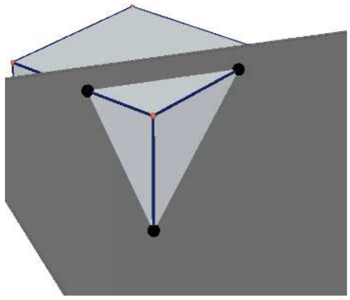

圖　4

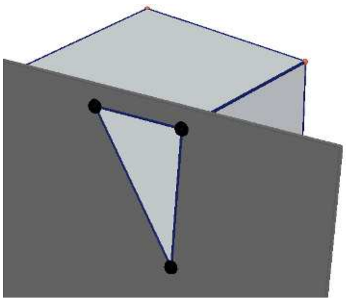

圖　2A

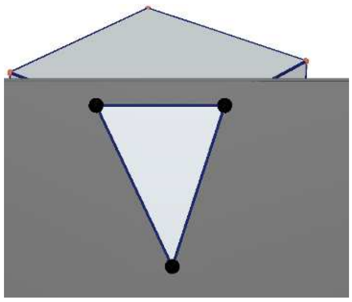

圖　3A

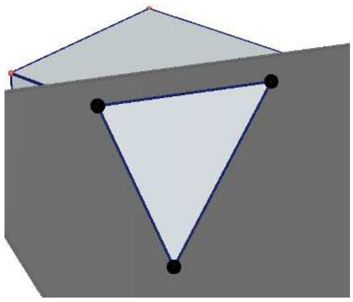

圖　4A

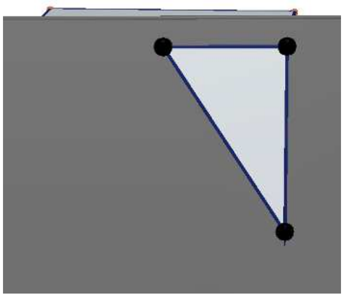

圖　2B

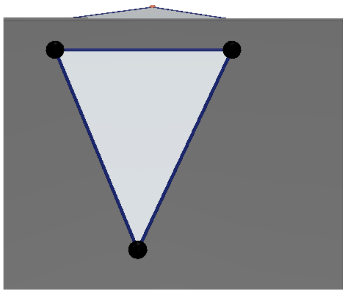

圖　3B

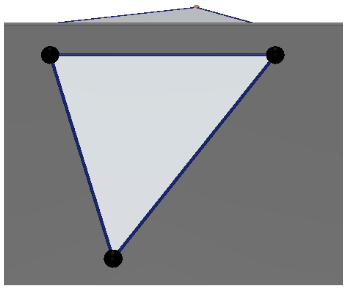

圖　4B

小學生碰過的三角形，包括等腰三角形、等邊三角形、直角三角形、

等腰直角三角形、銳角三角形（所有角都是銳角）和鈍角三角形（有一角是鈍角）。只要碰碰運氣，不難找到造出截面是等腰三角形（圖 5）、等邊三角形（圖 6）、銳角三角形（圖 7）的切割方法。

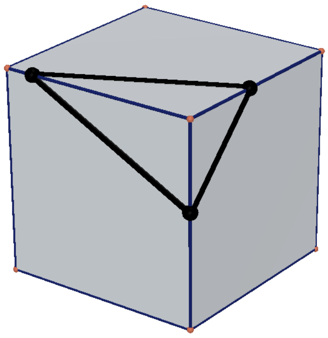

圖　5

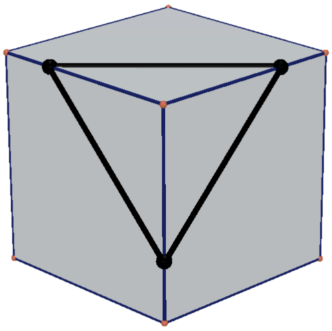

圖　6

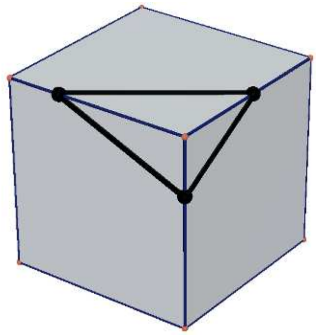

圖　7

小學生碰過的四邊形，包括梯形、平行四邊形、菱形、長方形、正方形和鷂形（四邊可分成兩對等長的鄰邊），其中梯形還有直角梯形、等腰梯形（非平行邊等長）等特殊類別。跟三角形截面的探討比較，四邊形截面要複雜得多。首先，隨便在正方體的三條相鄰的稜上找三點，即有唯一的一個切割平面通過它們，使得截面正好就是一個以此三點定義的三角形。相反地，隨便找四點，卻不能保證它們同屬一個平面。其次，只有上述的切割方法可以造出三角形的截面（解釋見於下文），要窮盡各種可能並不困難。相反地，存在不同的切割方法，可得出某些四邊形的特類（詳見下文），要窮盡各種可能比較費時。例如圖 1 與圖 8 的切割方法儘管不同（圖 8 的兩個不被切割的面是相鄰的，圖 1 卻不是），卻都可得出長方形的截面。

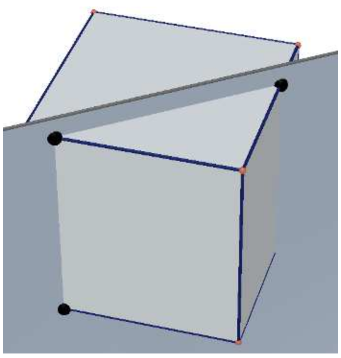

圖　8

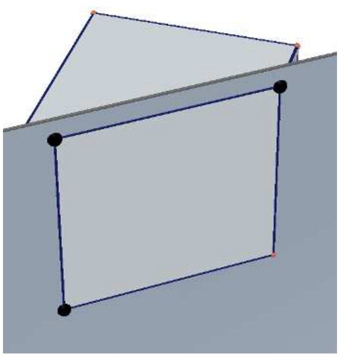

圖　8A

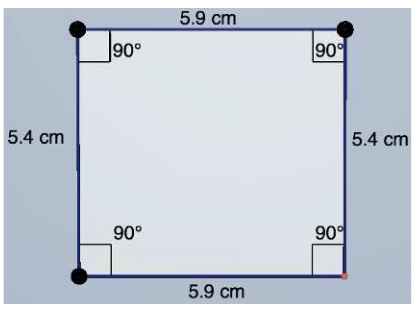


圖　8B

事實上，梯形（圖 9、9A）、等腰梯形（圖 12、12A）、平行四邊形（圖 10、10A、10B）、菱形（圖 11、11A、11B）都是可能得出的截面形狀。

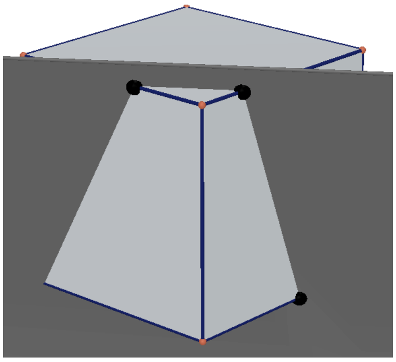

圖 9

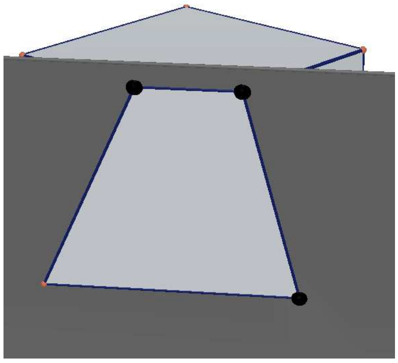

圖 9A

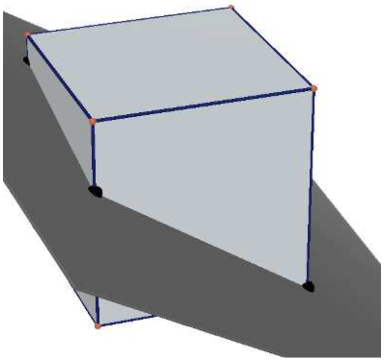

圖 10

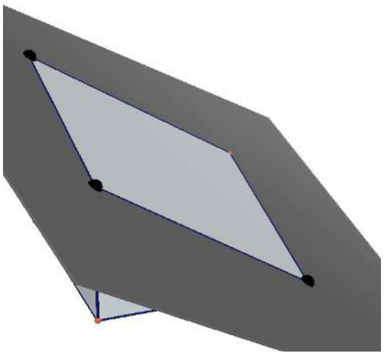

圖 10A

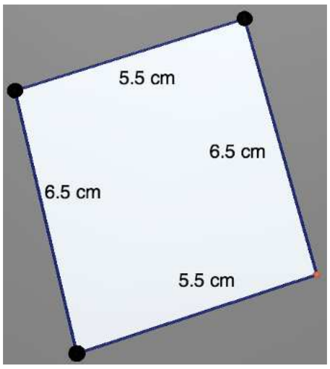


圖 10B

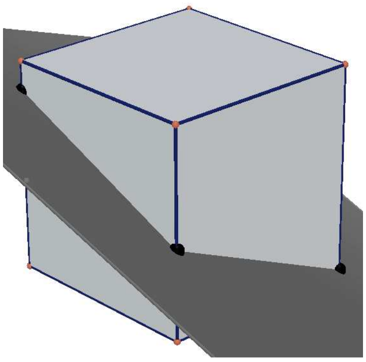

圖 11

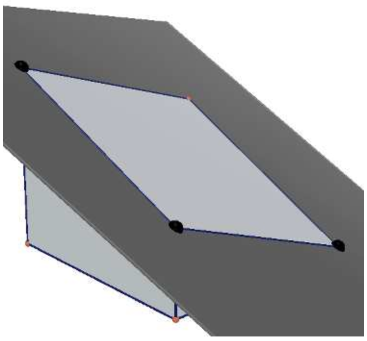

圖 11A

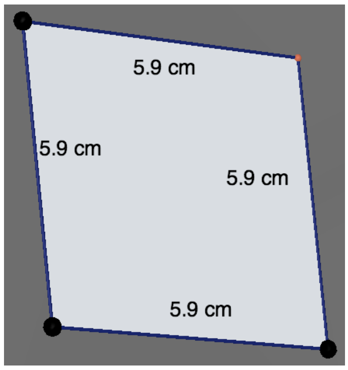


圖 11B

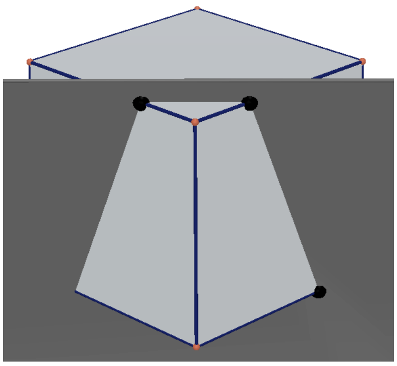

圖 12

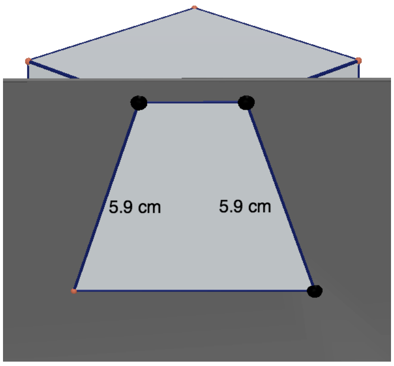


圖 12A

除了三角形和四邊形的截面外，正方體還有五邊形（圖 13、13A）和六邊形（圖 14、14A）的截面，其中包括正六邊形（以稜上中點定義圖 15、15A 的切割面即得）。

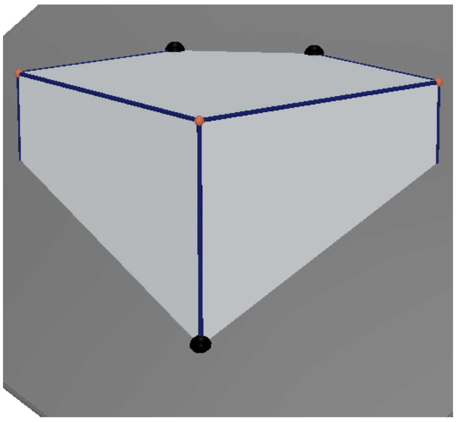

圖　13

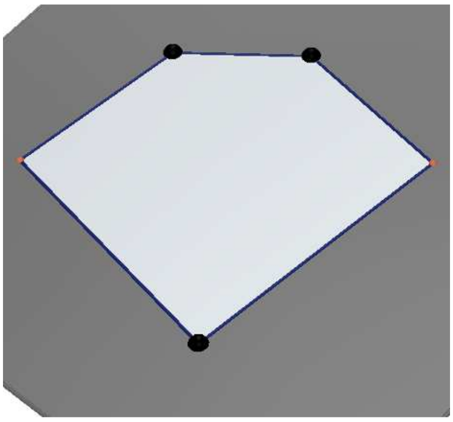

圖　13A

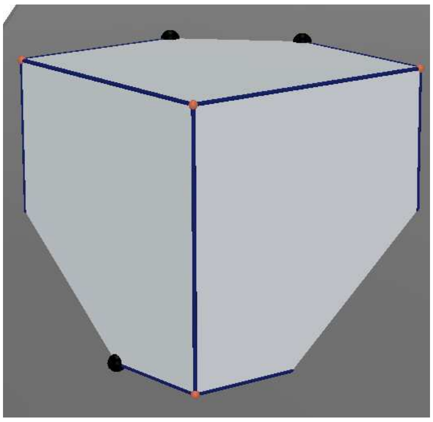

圖　14

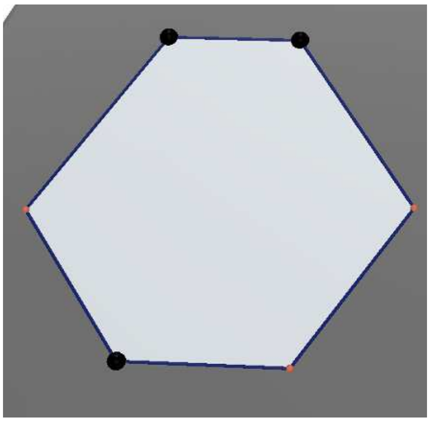

圖　14A

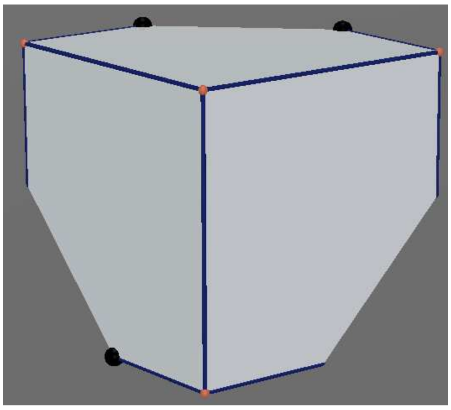

圖　15

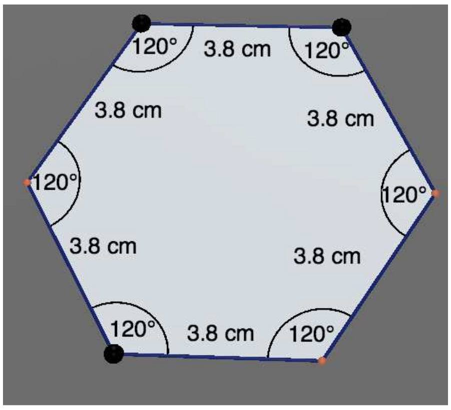


圖　15A

## 不可能得出的截面形狀

還未找到的截面形狀，包括直角三角形、等腰直角三角形、鈍角三角形、鷂形、直角梯形和正五邊形。欲探討它們是否存在，需要用上一些高中數學。

要造出 $n$ 邊形的截面，切割平面必須與正方體的 $n$ 個面相交。因此，可以肯定截面不可能是邊數大於 6 的多邊形。要造出三角形的截面，切割平面必須與正方體的三個面相交。三角形的每一對鄰邊，必須來自正方體上相鄰的面。正方體上三個兩兩相鄰的面，必定連接同一個頂點。因此，要得出三角形的截面，只可能透過像圖 5、6、7 的切割方法。細心檢視削去的三角錐 $ABCD$（圖 16），會發現截面三角形 $ABC$，與三個直角三角形 $ADB$、$BDC$ 和 $CDA$ 相鄰，而且直角都在 $D$ 之上。當 $C$ 極度接近 $D$ 時，三角形 $ACB$ 和 $ADB$ 會接近重疊（如圖 2），表示 $\angle ACB$ 和 $\angle ADB$ 會極度接近。因此，我們可以想像把 $C$ 點從 $D$ 點開始移向 $E$ 點，$\angle ACB$ 會從一個直角（即 $\angle ADB$）開始單向變化，直至變成 $\angle AEB$，過程與圖 2 至圖 4 顯示的相約。如果把 $C$ 看成是一隻盯著線段 $AB$ 眼睛，當它逐漸遠離 $AB$，生活經驗告訴我們：觀察 $AB$ 的視角（即 $\angle ACB$）就會逐漸縮小。換言之，當 $C$ 不與 $D$ 重疊，$\angle ACB$ 必定小於一個直角！

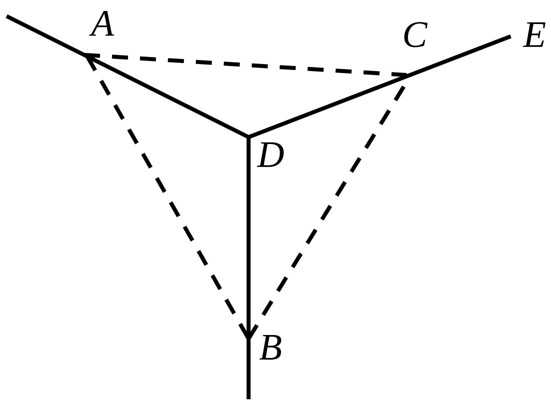


圖 16

如果不滿意上述那種簡便而粗疏的推論，也可藉畢氏定理得知：

$$\begin{aligned} AC^2 + BC^2 &= (AD^2 + CD^2) + (BD^2 + CD^2) \\ &= AD^2 + BD^2 + 2\,CD^2 \\ &= AB^2 + 2\,CD^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \end{aligned}$$

再用餘弦公式，可得：

$$AC^2 + BC^2 - AB^2 = 2\,AC \times BC \cos \angle ACB \quad \text{..............................(2)}$$

從 (1) 和 (2) 可算得 $\cos \angle ACB = \dfrac{CD}{AC} \times \dfrac{CD}{BC}$，是小於 1 的正數（因 $CD < AC$ 及 $CD < BC$），故知 $\angle ACB$ 是銳角。

同樣的推論也可確定 $\angle CBA$ 和 $\angle BAC$ 都是銳角，使我們可以肯定地說：「正方體只有銳角三角形的截面。」

要造出四邊形的截面，切割平面必須與正方體的四個面相交。其餘的兩個面的相對位置只有兩種情況：（一）兩個面是相鄰的（圖 17 打上陰影的兩面）；（二）兩個面是相對的（圖 18 打上陰影的兩面）。

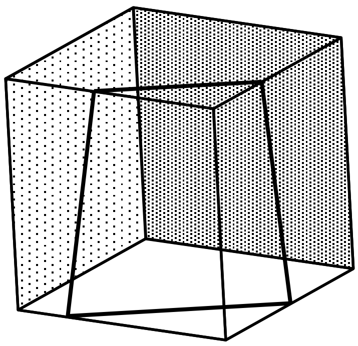

圖 17

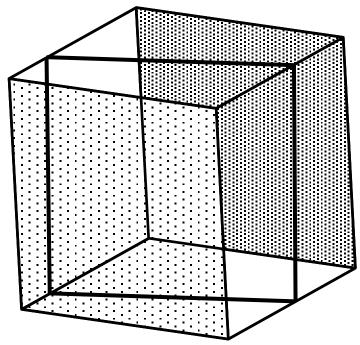

圖 18

先處理圖 17 的情況，考慮以圖 19 中 $H$、$K$、$P$ 三點定義的切割平面把正方體切開，並得出四邊形 $HKPQ$，其中 $Q$ 是稜 $OX$ 上的一點。

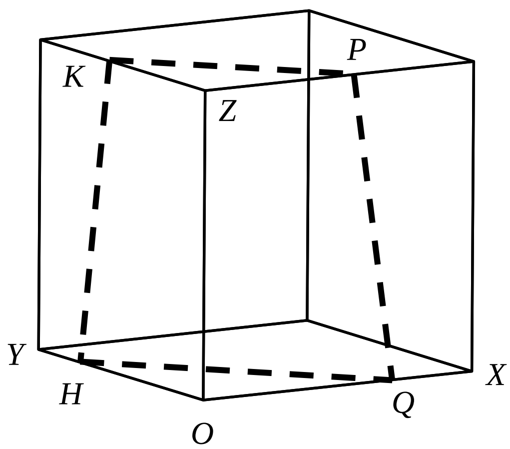


圖 19

設 $\overrightarrow{OH} = \alpha\overrightarrow{OY}$，$\overrightarrow{OK} = \beta\overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ}$，$\overrightarrow{OP} = \gamma\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OZ}$，$\overrightarrow{OQ} = \delta\overrightarrow{OX}$，其中 $0 < \alpha, \beta, \gamma, \delta \le 1$。則 $\overrightarrow{KP} = \gamma\overrightarrow{OX} - \beta\overrightarrow{OY}$，$\overrightarrow{KH} = (\alpha - \beta)\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OZ}$，$\overrightarrow{KQ} = \delta\overrightarrow{OX} - \beta\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OZ}$。$Q$ 與 $H$、$K$、$P$ 共面保證存在實數 $u$、$v$ 使 $\overrightarrow{KQ} = u\overrightarrow{KP} + v\overrightarrow{KH}$，即 $\delta\overrightarrow{OX} - \beta\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OZ} = u\gamma\overrightarrow{OX} + (v\alpha - v\beta - u\beta)\overrightarrow{OY} - v\overrightarrow{OZ}$。比較係數，即得

$$\alpha = u\beta，u\gamma = \delta，v = 1 \qquad (*)$$

從 (*) 可推論圖 17 的切割方法，可能得出怎樣的截面：

**推論 1** 圖 17 的截面有一對平行邊。

證 $\overrightarrow{HQ} = \delta\overrightarrow{OX} - \alpha\overrightarrow{OY} = u\gamma\overrightarrow{OX} - u\beta\overrightarrow{OY} = u(\gamma\overrightarrow{OX} - \beta\overrightarrow{OY}) = u\overrightarrow{KP}$，其中 $u = \dfrac{\alpha}{\beta}$，因此 $HQ$ 必定與 $KP$ 平行。

**推論 2** 圖 17 的截面如果有兩對平行邊，它就是矩形。

證 已知 $HQ$ 平行 $KP$（推論 1），若加上 $KH$ 平行 $PQ$，即存在非零實數 $\lambda$ 使 $(\alpha - \beta)\overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{KH} = \lambda\overrightarrow{PQ} = \lambda[(\delta - \gamma)\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OZ}]$。比較係數，即得 $\delta = \gamma$，$\lambda = 1$，$\alpha = \beta$，使 $\overrightarrow{KP}\cdot\overrightarrow{KH} = (\gamma\overrightarrow{OX} - \beta\overrightarrow{OY})\cdot(-\overrightarrow{OZ}) = 0$。因此，$HKPQ$ 乃含直角的平行四邊形，即矩形。

**推論 3** 圖 17 的截面如果是鷂形，它就是正方形。

證 推論 1 確定圖 17 的截面有平行邊，而有平行邊的鷂形必是菱形（證明只涉初中幾何知識，此處從略），由推論 2 可知這圖為有鄰邊等長的矩形，即正方形。

**推論 4** 圖 17 的截面如果含有直角，它就是矩形。

證 由於 $HQ$ 平行 $KP$（推論 1），不妨假設 $\angle PKH$ 為直角。從 $(\gamma\overrightarrow{OX} - \beta\overrightarrow{OY})\cdot[(\delta - \gamma)\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OZ}] = \overrightarrow{KP}\cdot\overrightarrow{KH} = 0$ 可得 $\alpha = \beta$，加上 (*) 即知 $\overrightarrow{KP} = \gamma\overrightarrow{OX} - \beta\overrightarrow{OY} = \delta\overrightarrow{OX} - \alpha\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{HQ}$，表示 $HKPQ$ 為平行四邊形，最後推論 2 確定它是矩形。

用同樣的手法，考慮圖 18 的情況。先以向量 $\overrightarrow{OX}$、$\overrightarrow{OY}$、$\overrightarrow{OZ}$ 表圖

20 的向量，即 $\overrightarrow{OH} = \alpha\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$，$\overrightarrow{OK} = \beta\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ}$，$\overrightarrow{OP} = \gamma\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OZ}$，$\overrightarrow{OQ} = \delta\overrightarrow{OX}$，其中 $0 < \alpha, \beta, \gamma, \delta \le 1$。

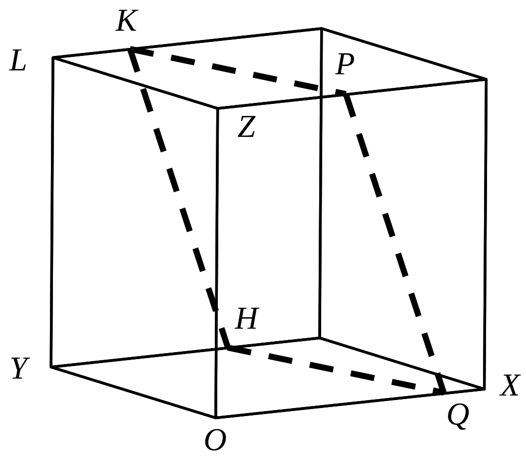


圖　20

接著算得 $\overrightarrow{KP} = (\gamma - \beta)\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OY}$，$\overrightarrow{KH} = (\alpha - \beta)\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OZ}$，$\overrightarrow{KQ} = (\delta - \beta)\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OZ}$。由 $H$、$K$、$P$、$Q$ 共面可知存在實數 $u$、$v$ 使 $u(\gamma - \beta)\overrightarrow{OX} - u\overrightarrow{OY} + v(\alpha - \beta)\overrightarrow{OX} - v\overrightarrow{OZ} = u\overrightarrow{KP} + v\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{KQ} = (\delta - \beta)\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OY} - \overrightarrow{OZ}$。比較係數，可得

$$\gamma + \alpha = \delta + \beta，u = 1，v = 1 \qquad (\#)$$

從 (#) 可推論圖 18 的切割方法，可能得出怎樣的截面：

**推論 5**　圖 18 的截面是平行四邊形。

**證**　從 (#) 中 $u = v = 1$，或 $\overrightarrow{KP} = (\gamma - \beta)\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OY} = (\delta - \alpha)\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{HQ}$ 可知。

**推論 6**　圖 18 的截面如果是菱形，則它的其中兩個相對的頂點與打上陰影的面的距離相等，此距離亦是另外兩個相對的頂點與打上陰影的面的平均距離。

**證**　已知 $HKPQ$ 是平行四邊形（**推論 5**），若 $|\overrightarrow{KP}| = |\overrightarrow{KH}|$，則 $(\gamma - \beta)^2 + 1 = (\alpha - \beta)^2 + 1$。化簡後得 $(\gamma - \alpha)(\gamma + \alpha - 2\beta) = 0$，即 $\gamma = \alpha$ 或 $\beta = \dfrac{\gamma+\alpha}{2}$。由 (#) 可知 $\gamma = \alpha$ 對應 $\alpha = \dfrac{\delta+\beta}{2}$，$\beta = \dfrac{\gamma+\alpha}{2}$ 對應 $\delta = \beta$。兩種情況都顯示**推論 6** 正確。

**推論 7**　圖 18 的截面如果是矩形，則它的其中兩個相鄰的頂點與打上陰影的面的距離相等，另外兩個頂點與打上陰影的面的距離亦相等。

**證**　已知 $HKPQ$ 是平行四邊形（**推論 5**），若 $\angle PKH$ 為直角，則 $[(\gamma - \beta)\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OY}] \cdot [(\alpha - \beta)\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OZ}] = \overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{KH} = 0$。由此得 $(\gamma - \beta)(\alpha - \beta) = 0$，即 $\gamma = \beta$ 或 $\alpha = \beta$。由 (#) 可知 $\gamma = \beta$ 對應 $\alpha = \delta$，$\alpha = \beta$ 對應 $\gamma = \delta$。兩種情況都顯示**推論 7** 正確。

要解釋正方體沒有正五邊形截面，只需考慮以圖 21 中 $P$、$Q$、$G$ 三點定義的切割平面把正方體切開，並得出五邊形 $PQHGF$ 的情況。

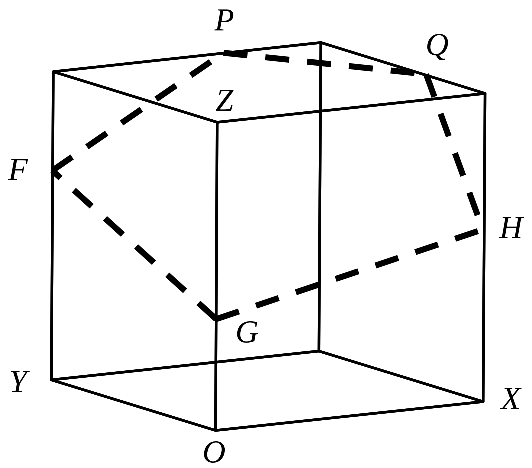


圖　21

設 $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ}$（$0 < \alpha < 1$），$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OX} + \beta\overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ}$（$0 < \beta < 1$），$\overrightarrow{OG} = \gamma\overrightarrow{OZ}$（$0 \le \gamma < 1$），$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OY} + \delta\overrightarrow{OZ}$（$0 \le \delta < 1$），$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OX} + \lambda\overrightarrow{OZ}$（$0 \le \lambda < 1$）。則 $\overrightarrow{QP} = (\alpha - 1)\overrightarrow{OX} + (1 - \beta)\overrightarrow{OY}$，$\overrightarrow{QG} = -\overrightarrow{OX} - \beta\overrightarrow{OY} + (\gamma - 1)\overrightarrow{OZ}$，$\overrightarrow{QF} = -\overrightarrow{OX} + (1 - \beta)\overrightarrow{OY} + (\delta - 1)\overrightarrow{OZ}$，$\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{OY} + (\delta - \gamma)\overrightarrow{OZ}$，$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OX} + (\lambda - \gamma)\overrightarrow{OZ}$。

$F$ 與 $P$、$Q$、$G$ 共面保證存在實數 $u$、$v$ 使 $\overrightarrow{QF} = u\overrightarrow{QP} + v\overrightarrow{QG}$，即 $-\overrightarrow{OX} + (1 - \beta)\overrightarrow{OY} + (\delta - 1)\overrightarrow{OZ} = (u\alpha - u - v)\overrightarrow{OX} + (u - u\beta - v\beta)\overrightarrow{OY} + (v\gamma - v)\overrightarrow{OZ}$。比較係數，即得

$$u(\alpha - 1) = v - 1 \quad (3)$$
$$u(1 - \beta) = (v - 1)\beta + 1 \quad (4)$$
$$v(\gamma - 1) + 1 = \delta \quad (5)$$

先以反證法證明 $\delta > \gamma$。假設 $\delta \le \gamma$，從 (5) 可得 $v(\gamma - 1) + 1 \le \gamma$，即 $(v - 1)(\gamma - 1) \le 0$。由於 $\gamma < 1$，故知 $v - 1 \ge 0$。以此代入 (3) 及 (4)，並注意到 $\alpha < 1$ 及 $0 < \beta < 1$，便可得到 $u \le 0$ 和 $u > 0$ 同時成立的矛盾。同理，亦知 $\lambda > \gamma$。

要證 $PQHGF$ 不可能是正五邊形，只需證明 $\angle FGH < 108°$（正五邊形的內角）即可。從 $\delta > \gamma$ 及 $\lambda > \gamma$ 可知 $\cos \angle FGH = \dfrac{\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{GH}}{|\overrightarrow{GF}||\overrightarrow{GH}|} = \dfrac{(\delta-\gamma)(\lambda-\gamma)}{|\overrightarrow{GF}||\overrightarrow{GH}|} > 0$，表示 $\angle FGH$ 不大於一個直角，自然小於 108°。

<u>正六邊形截面</u>

前述結果顯示正方體雖有五邊形截面，但不會是正五邊形。那麼正六邊形截面的存在，便是令人驚訝的巧合。究竟是真有其事，還是美麗的測量誤差所致？

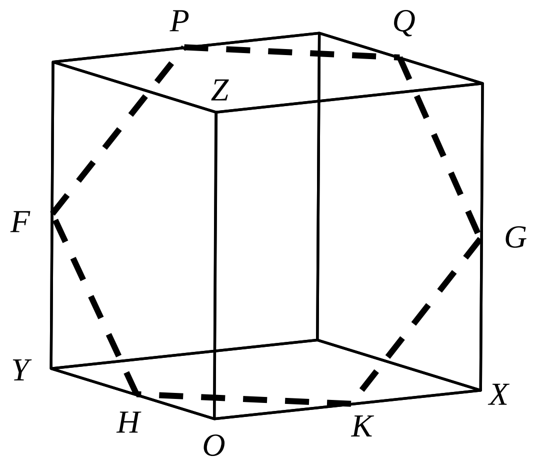


圖 22

假設圖 22 中，$P$、$Q$、$H$ 均為所在稜上的中點，便有 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ}$，$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OX} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OY} + \overrightarrow{OZ}$，$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OY}$。設 $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OY} + \alpha\overrightarrow{OZ}$，$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OX} + \beta\overrightarrow{OZ}$，$\overrightarrow{OK} = \gamma\overrightarrow{OX}$，其中 $0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$。則 $\overrightarrow{QP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY}$，$\overrightarrow{QH} = -\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OZ}$，$\overrightarrow{QF} = -\overrightarrow{OX} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OY} + (\alpha - 1)\overrightarrow{OZ}$。$F$ 與 $P$、$Q$、$H$ 共面保證存在實數 $u$、$v$ 使 $\overrightarrow{QF} = u\overrightarrow{QP} + v\overrightarrow{QH}$，即 $-\overrightarrow{OX} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OY} + (\alpha - 1)\overrightarrow{OZ} = -\frac{1}{2}u\overrightarrow{OX} + \frac{1}{2}u\overrightarrow{OY} - v\overrightarrow{OX} - v\overrightarrow{OZ}$。比較

係數，即得 $-1=-\frac{1}{2}u-v$，$u=1$，$\alpha-1=-v$。解聯立方程可求得 $\alpha=\frac{1}{2}$。以相同手法可算得 $\beta=\gamma=\frac{1}{2}$，顯示 $P$、$Q$、$G$、$K$、$H$、$F$ 均是所在棱上的中點。考慮 $PQ$、$QG$、$GK$、$KH$、$HF$、$FP$ 各線段與最近頂點生成的直角三角形都是全等，便知 $PQGKHF$ 是等邊六邊形。從正方體的對稱性可確定 $PG=QK=GH=KF=HP=FQ$，進而推論 $\Delta PQG$、$\Delta QGK$、$\Delta GKH$、$\Delta KHF$、$\Delta HFP$、$\Delta FPQ$ 全部全等，表示 $PQGKHF$ 是等角六邊形。所以 $PQGKHF$ 是正六邊形。

## 總結

正方體的三角形截面，只能從切割三個有公共頂點的面得出（圖 5、6、7），而且都只有銳角，可以是等腰（於圖 16 設定 $AD$、$BD$、$CD$ 其中之二相等）或等邊（於圖 16 設定 $AD=BD=CD$）三角形。正方體的四邊形截面可以是正方形（於圖 19 設定 $KP=OZ$ 及 $HK\perp OY$ 或圖 20 設定平面 $HKP$ 平行平面 $OYZ$）、長方形（於圖 19 設定 $KP\neq OZ$ 及 $HK\perp OY$ 或圖 20 設定 $LK=YH$ 及 $ZP\neq YH$）、平行四邊形（於圖 20 設定 $ZP\neq YH$，而 $LK$ 不等於 $ZP$、$YH$、$\frac{ZP+YH}{2}$ 任何一個）、菱形（於圖 20 設定 $ZP=YH$，而 $LK\neq ZP$）和梯形（於圖 19 設定 $ZK\neq OH$）。正方形和長方形均可分別以圖 17 和圖 18 的切割法得出；圖 17 的切割法還可得出梯形，要等腰的話就得在圖 19 中設定 $KZ=PZ$；圖 18 的切割法得出的都是平行四邊形，要得菱形就要在圖 20 中設定 $ZP=YH$，如果平面 $HK$P 不與平面 $OYZ$ 平行，$HKPQ$ 就是沒有直角的菱形，否則就是正方形。

多邊形截面的邊數最大是 6；於圖 21 中隨意取 $P$、$Q$ 和 $G$，只要不是棱的端點，都可得到五邊形的截面；於圖 22 中隨意取 $P$、$Q$ 和 $H$，只要不是棱的端點，都可得到六邊形的截面；如果於圖 22 中取 $P$、$Q$ 和 $H$ 均是所在棱的中點，所得的截面就是正六邊形；直角三角形、直角梯形及正五邊形的截面是不存在的；鷂形截面只有菱形和正方形這兩種特殊情況。

## 參考資料

香港課程發展議會（2000）。《數學課程指引（小一至小六）》。香港：教育署。

作者電郵：cifung@ied.edu.hk