漫談一些體積與表面積的初等方法

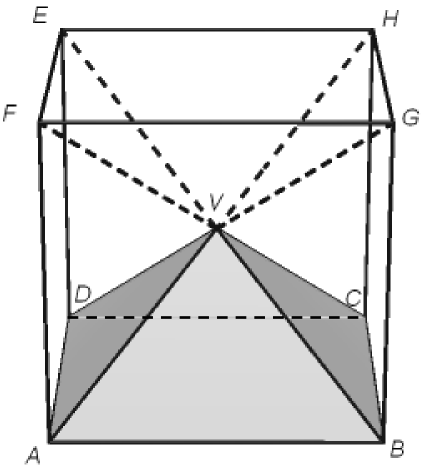
柯志明

引言

筆者於《數學教育》24 期的一篇文章（柯，2007）中介紹了一中一西的兩個球體體積公式的初等證明。本文再接再厲，介紹一些深入淺出的錐體體積及球體表面積公式的初等證明，以彌補低年級學生（通常是中三）學習這些公式時「不知其所以然」的缺憾。

錐體的體積

不知何故，現在仍有教科書以圖一這個筆者戲稱爲「六神合體」的「經典」方法（香港課程發展委員會，1985，72 頁）展示（illustrate）錐體體積公式。筆者現在還記得自己讀中三時看到這個方法後強烈的被騙感覺。其實，若要令學生相信這公式，圖二的「三合一」方法好得多。既簡單易明，又可讓學生加深對公式中 $\frac{1}{3}$ 的印象。



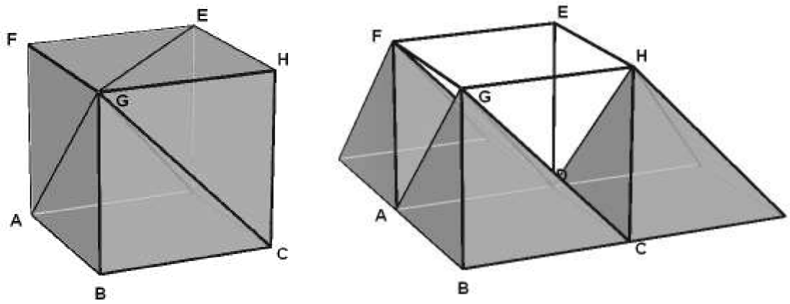
稜錐 $VABCD$ 體積

$$= \frac{1}{6}a^3$$

$$= \frac{1}{3}\times a^2\times\frac{a}{2}$$

$$= \frac{1}{3}\times\text{底面積}\times\text{高}$$

圖　一



稜錐 *ABCDG* 體積

$= \dfrac{1}{3} \times$正方體體積

$= \dfrac{1}{3} \times$底面積$\times$高

圖　二

古希臘的哲學家 Democritus（公元前 460 – 公元前 370）將這「三合一」意念推廣到更一般的情況（Edwards，1979，8 – 10 頁）。考慮一個一般的三稜錐 *ABCD*，將這個三稜錐的底 *ABC* 沿著斜高 *BD* 向上平移得出一個三稜柱 *ABCDEF*（圖三）。將這個柱體分爲三個稜錐 *ABCD*、*ACDF* 及 *CDEF*。我們接著會證明，稜錐 *ABCD*、*ACDF* 及 *CDEF* 有相同的體積，所以稜錐 *ABCD* 的體積爲 $\dfrac{1}{3} \times$ 底面積 $\times$ 高。

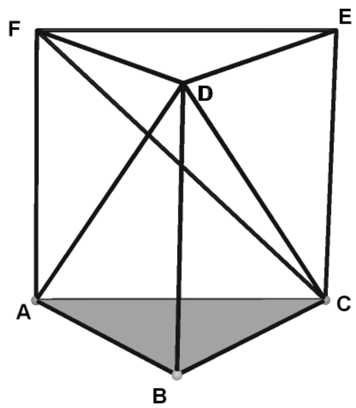
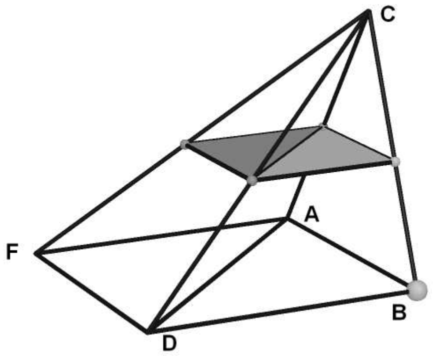


圖　三

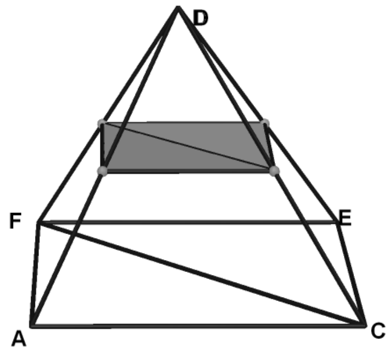
先看稜錐 *ABCD* 及 *ACDF*。事實上 $\Delta ABD \cong \Delta DFA$。若分別以 *ABD* 及 *ADF* 爲稜錐 *ABCD* 及 *ACDF* 的底，從圖四(a) 我們可看到稜錐 *ABCD* 及 *ACDF* 有著相同的高，而且它們在任何一個高度的橫切面都是全等的 [1]。想像兩個立體是兩疊薄紙所組成，若每一張紙（橫切面）都全等，而紙張的數目又一樣（高度相等），那麼兩疊紙的體積，亦即是兩個稜錐 *ABCD* 及 *ACDF* 的體積，也應該相等了。這個以比較橫切面計算體積的方法在西方稱爲「卡瓦列利（Cavalieri）原理」，在微積分發明前已被廣泛地應用（蕭，

1　讀者可想一想為什麼？

1993，32 頁）。



(a)



(b)

圖　四

類似地，考慮稜錐 *ACDF* 及 *CDEF*，分別以 *AFC* 及 *CEF* 爲它們的底，那麼它們也有著相同的高，而且於同一高度有全等的橫切面（圖四(b)）。由「卡氏原理」，稜錐 *ACDF* 及 *CDEF* 的體積相等。

所以，三個稜錐 *ABCD*、*ACDF* 及 *CDEF* 的體積是相等的，於是

$$\begin{aligned}\text{三稜錐 } ABCD \text{ 的體積} &= \frac{1}{3}\ \text{三稜柱 } ABCDEF \text{ 的體積}\\ &= \frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高}\end{aligned}$$

對於一般的 n 稜錐，只要將它 n 邊形的底分成 $(n-2)$ 個三角形，然後將它分成 $(n-2)$ 個三稜錐，即可以證明它的體積亦等於 $\frac{1}{3}$ × 底面積 × 高。對於圓錐，只要將它看成 n 稜錐的極限，亦有相同的結果。

球體的表面積

若已經得出稜錐及球體的體積公式，我們可以用圖五的方法簡易地求出球體的表面積。圖五顯示一個球體。將這個球體分割爲多個頂點在球心、底在球面的稜錐。假設總共有 n 個稜錐，它們的底面積爲 A_1、A_2、A_3、…、A_n，而每個稜錐的高皆爲球體的半徑 r。

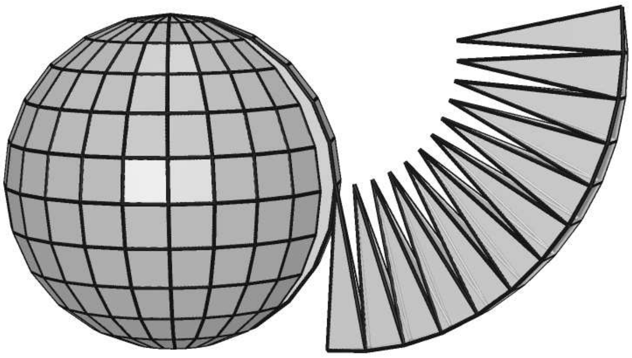


圖　五

因爲　　稜錐的體積總和 = 球體的體積

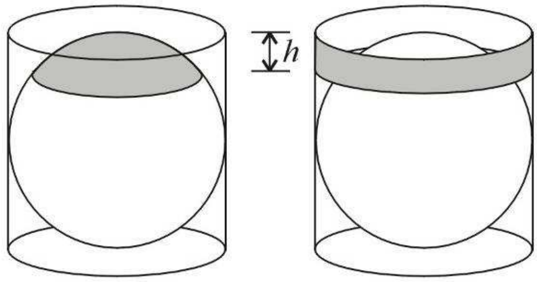
所以
$$\frac{1}{3}A_1r+\frac{1}{3}A_2r+\frac{1}{3}A_3r+\ldots+\frac{1}{3}A_nr = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$\frac{1}{3}\left(A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n\right)r = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n = 4\pi r^2$$

∴　　球體的表面積 = $4\pi r^2$

以上方法主要是證明了球體體積 V 及其表面積 S 的關係式 $V=\frac{1}{3}rS$，然後從已經求得的 V 得出 S。其實有沒有直接地求得球體表面積 S 的初等方法呢？

阿基米德的墓碑

古希臘數學家阿基米德（Archimedes, 公元前 287 – 公元前 212）一生有很多重要的發現，卻只在自己的墓碑刻上以下結果：球體的體積和表面積等於它的外接圓柱體的體積和表面積（包括底和面）的三分之二（圖六），顯示他對這個結果情有獨鍾。關於球體的表面積，阿基米德的著作《圓球與圓柱》（On the sphere and cylinder）的有一條優美的定理（蕭，2004，7 頁）：高爲 h 的球冠的曲面面積等於它的外接圓柱體同一高度部份的側面積（圖七），即等於 $2\pi Rh$。若 h 等於 $2R$，我們就得出整個球體的表面積爲 $4\pi R^2$ 了。

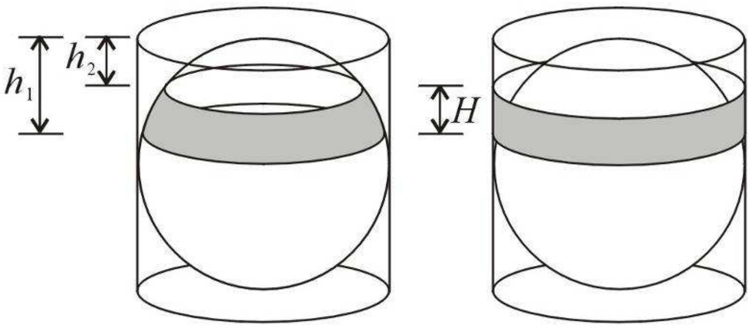


球冠的曲面面積 = 陰影部份的圓柱側面積

= $2\pi Rh$

圖　六　　　　　　　　圖　七

這定理有一個更優美的引伸：一個球台的側面積等於它的外接圓柱體同一高度部份的側面積（圖八），即等於 $2\pi RH$，其中 H 爲球台的的厚度（蕭，2004 p.7）。原來球台的側面積只和它的厚度有關，而和它的位置（緯度 latitude）無關！關於這個優美的結果，蕭文強教授在他 2004 年的著作《杵臼關節、阿基米德、多面體》中有一個精采的應用，讀者不容錯過。



球台側面積

= 大球冠的表面積 − 小球冠的表面積

= $2\pi Rh_1 - 2\pi Rh_2$

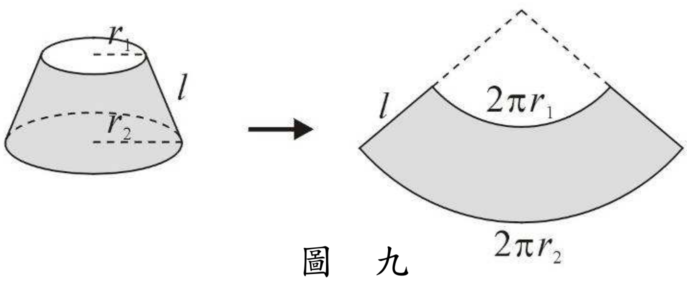
= $2\pi R\,(h_1 - h_2)$

= $2\pi RH$

= 陰影部份的圓柱側面積

圖　八

綜合蕭（2004，8 頁）及 Flores（2000）等文，筆者嘗試提出這個優美結果的一個簡單的初等證明。首先我們有以下的結果：圖九的截頭圓錐體（frustum）的側面積是 $\pi l\,(r_1 + r_2)$。這個結果的證明雖不算難，卻也不是太易，讀者請試試自己證明。



側面積

= $\pi\, l\,(r_1 + r_2)$

圖　九

現在考慮一個球體的外接截頭圓錐體，它的厚度是 h，斜高爲 l，而它和球體的相交圓在截頭圓錐體的高的中間位置（圖十）。我們現在證明，截頭圓錐體的側面積和它的外接圓柱體同一高度部份的側面積相等。

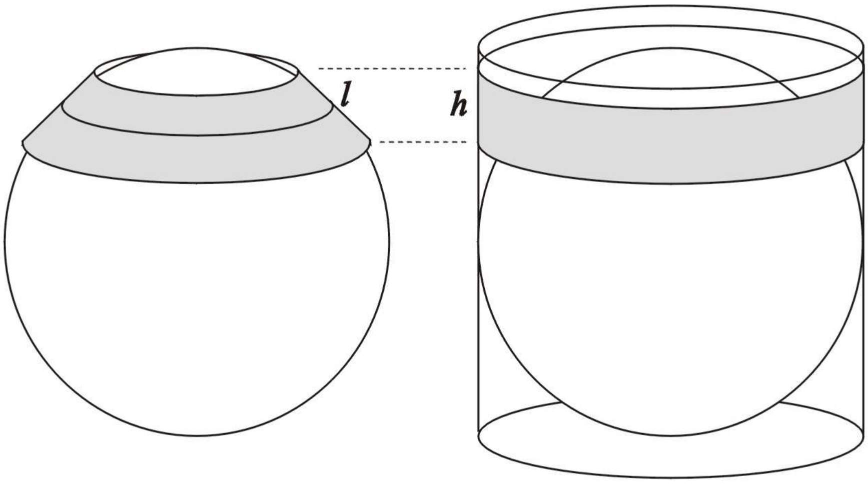


圖　十

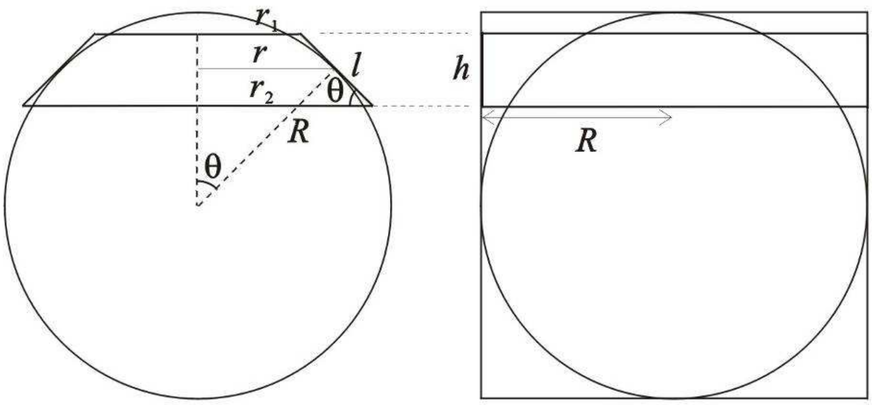


圖　十　一

圖十一是一個穿過球體中心的直切面。如圖所示，

$$
\begin{aligned}
\text{截頭圓錐體的側面積} &= \pi l\,(r_1 + r_2) \\
&= \pi l \cdot 2r \\
&= 2\pi l\, R\sin\theta \quad (\because r = R\sin\theta) \\
&= 2\pi R\,(l\sin\theta) \\
&= 2\pi R h \\
&= \text{外接圓柱體同一高度部份的側面積}
\end{aligned}
$$

最後，把球台看成是由 n 層的這些截頭圓錐體組成。當 n 趨向無限，截頭圓錐體的側面積總和就趨向球台的側面積。所以，

球台的側面積 = 截頭圓錐體的側面積總和

$$= 2\pi R h_1 + 2\pi R h_2 + \ldots + 2\pi R h_n$$

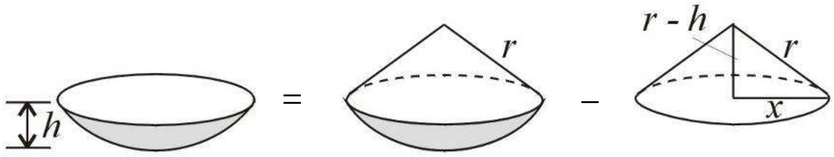
（$h_1, h_2, \ldots, h_n$ 爲各截頭圓錐體的厚度）

$$= 2\pi R(h_1 + h_2 + \ldots + h_n)$$

$$= 2\pi R H$$ （H 爲球台的厚度）

球冠的體積

以定積分求高爲 h 的球冠體積是中五的附加數學科一條典型題目。知道了球冠的曲面面積後，運用圖五的意念，我們就可以不必用定積分而得出球冠的體積了。以下是這個方法的圖解：



$$= \frac{1}{3}\cdot\text{球冠曲面面積}\cdot r - \frac{\pi}{3}x^2(r-h)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 2\pi rh\cdot r - \frac{\pi}{3}(r^2-(r-h)^2)(r-h)$$

$$= \frac{\pi}{3}h^2(3r-h)$$

後記

不用微積分，如何證明錐體體積和球體體積及表面積的公式呢？這條筆者讀中三時問的問題，要到在大學時修讀蕭文強教授和梁鑑添教授的數學史課程時，才無意中在 Eves（1990）及 Edwards（1979）等著作中找到答案，當時真是滿心歡喜！本以爲這條問題已經有滿意的答案，直到 2004 年，才從蕭教授的著作（蕭，2004）得知原來還有一條如此優美的球台側面積的結果，真有點「朝聞道，夕可死」的感覺！本文和前文（柯，2007）算是筆者對自己二十多年來在這條問題上的學習成果（learning outcomes）的一個紀錄。

讓筆者感慨的是，今時今日，即使一位修讀純數學、熟悉微積分理論及應用的香港中七學生，也不懂得以微積分證明球體的表面積公式了，因爲「以積分法求旋轉體的表面面積」這課題已於 2004 年起從純數學課程中刪除[2]。即使是體積，課程也只要求以積分法求旋轉體的體積而矣。所以，這位學生應該懂得以積分法證明直立圓錐及球體的體積公式，卻未必懂得證明稜錐的體積公式了。（有教中七純數的同工不妨問問學生，看看有多少人能成功作答。）一些中三已經學過的體積及表面積公式，到中七飽讀微積分後仍然不懂得解釋，豈不可悲？

希望筆者拙文能讓更多的同工知道這些體積及表面積公式的初等證明，從而向學生講解。筆者相信，很多中三的學生和年輕時的筆者一樣，或多或少會有興趣知道這些公式的證明的，即使這些證明不在測驗或考試範圍之內。筆者始終認爲，滿足學生的「知性需要」（intellectual need）比滿足他們考試拿高分等「社經需要」（social economic need）更能引起學生的學習動機（見 Harel，1998 的 "Necessity Principle"）。而且，這也是一個很好的機會，讓學生能夠「欣賞數學的精確和美妙之處」（香港課程發展議會，1999，5 頁），並讓這些寫在課程文件裡的美好目標能夠在課堂內落實。

註：本文圖二至圖五均是以 Cabri 3D 製作的動態圖片，並有工作紙配合。有興趣的讀者可在以下教育局的網上學與教支援網址下載。

稜錐與球體體積：

http://cd1.edb.hkedcity.net/cd/bcalt/math/ks3/chi/KS3-MS3-3/KS3-MS3-3-f.htm

球體的表面積：

http://cd1.edb.hkedcity.net/cd/bcalt/math/ks3/chi/KS3-MS3-4/KS3-MS3-4f.htm

參考文獻

香港課程發展委員會（1985）。《數學科課程綱要（中一至中五適用）》。香港：香港課程發展委員會。2008 年 6 月 27 日下載於 http://www.edb.gov.hk/index.aspx?nodeID=4902&langno=2

香港課程發展議會（1999）。《中學課程綱要：數學科（中一至中五）》。香港：香港課程發展議會。

2 被刪除的課題還有「向量（二維及三維）」、「以積分法求弧長」、「於極坐標系的曲綫描繪」及「廣義積分」等。除了「向量」將會被重新納入即將推行的新高中數學課程延伸部分單元二外，其他課題在可見的將來都不會再在香港的課程出現了。

蕭文强（1993）。微積分的故事。載於蕭文强，《1, 2, 3, ……以外–數學奇趣錄》，20 – 44 頁。香港：三聯書店有限公司。

蕭文强（2004）。《杵臼關節、阿基米德、多面體》。香港：香港大學數學系。
本書可於 http://www.hku.hk/math/ 點擊 “Events”、“數趣漫話 – 出版書籍”下載。

柯志明（2007）。化圓爲方——球體體積與牟合方蓋。《數學教育》24 期，12 – 17 頁。

Edwards, C. H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag.

Eves, H. (1990). *An introduction to the history of mathematics (Sixth Ed.)*. Philadelphia: Saunders College Publishing.

Flores, A. (2000). Surface Area of the Sphere: A Heuristic Argument. *Primus* Vol. 10, No.4, p.345 – 350.

Harel, G. (1998). Two Dual Assertions: The First on Learning and the Second on Teaching (or Vice Versa). *The American Mathematical Monthly*, Vol. 105, No. 6, p. 497 – 507.

作者電郵： orchiming@gmail.com