小學帶餘除法的教學

馮振業
香港教育學院數社科技學系

引言

在小學的數學課程內，除法出現多次，包括整數、分數和小數的除法。以香港的課程爲例，除一年級之外，每一學年都有除法的學習：小二、小三是除數爲一位數的整數除法；小四是除數爲兩位數的整數除法；小五有分數除法；小六就有小數除法（香港課程發展議會，2000）。這些課題跨越五個級別，當中除了「÷」號共通之外，還有一些看似相同卻又不盡相同的觀念。本文試從整數除法概念開始，介紹帶餘除法如何推廣至分數和小數運算。礙於篇幅所限，不得不略去分數除法的基礎觀念及計算法則的推導。這些內容不少，而且自成一體，較適合於另一獨立章討論。

整數的除法概念

學了乘法，熟誦乘數表的小二學生，會開始除法概念的學習。一般的入手方法，是透過分物活動，介紹除法的意義。例如，把蘋果 13 個，平均放入 4 個盒子，要知每個盒子有蘋果多少個，剩下多少個，便得從事以下均分的操作。圖一至圖四是整個過程的演示，教師應讓學生親自動手完成。

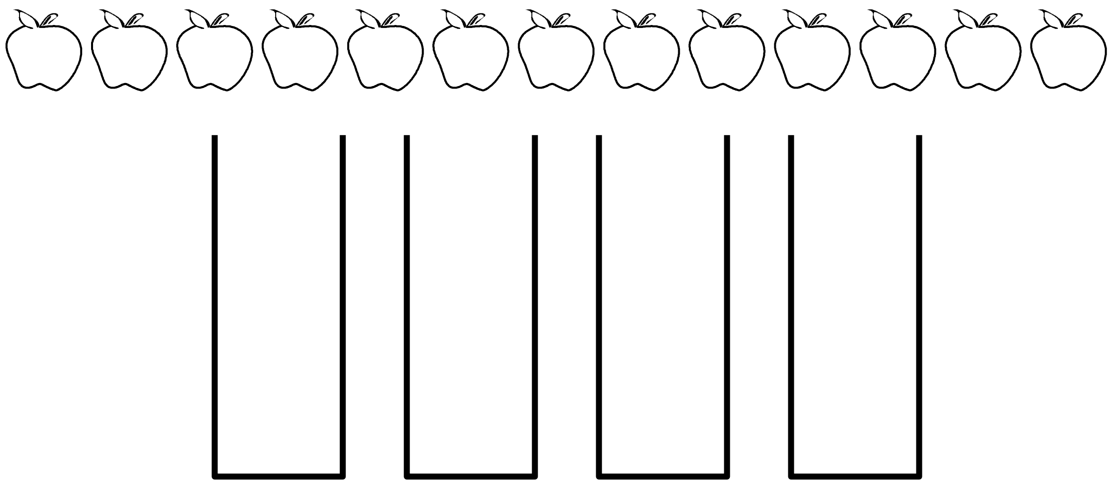

圖　一

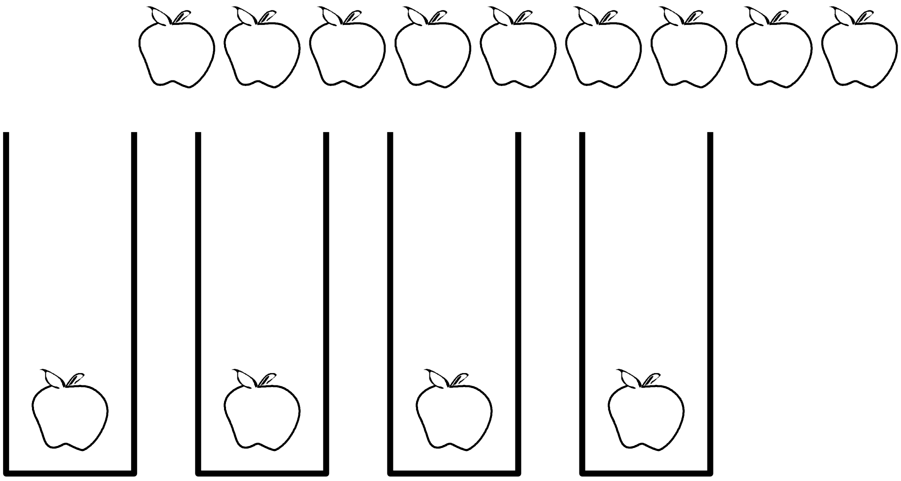

圖　二

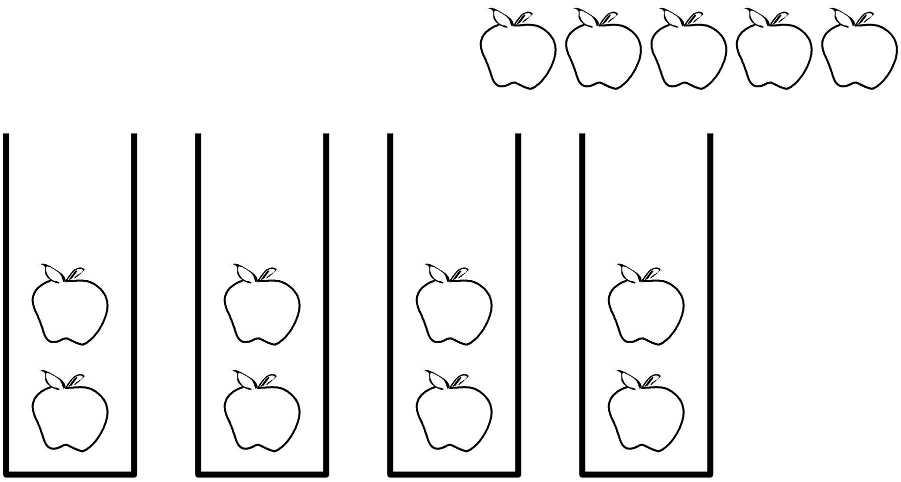

圖　三

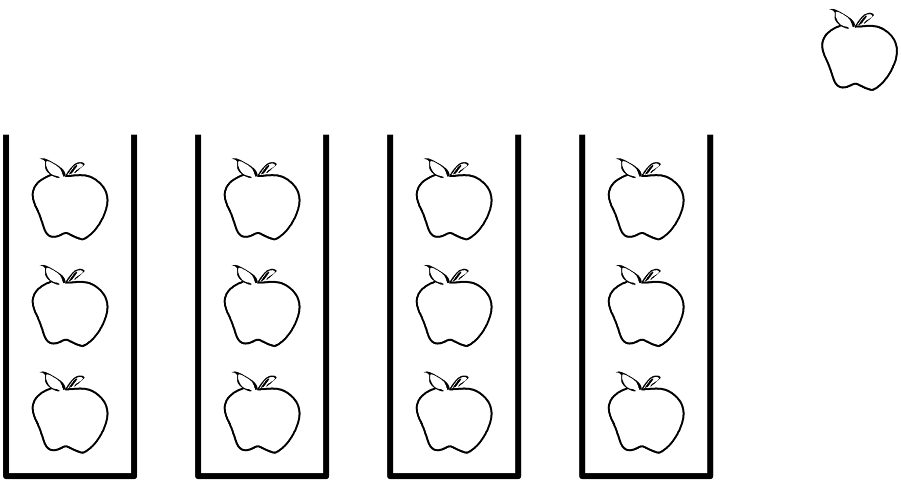

圖　四

操作完成之後，得到兩個數，就是每盒的蘋果數量和餘下的蘋果數量。

如果把情境更改成把蘋果 13 個，每 4 個一包，要知造得多少包，剩下多少個，便得從事以下分組的操作。

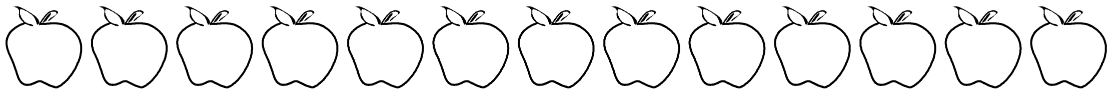

圖　五

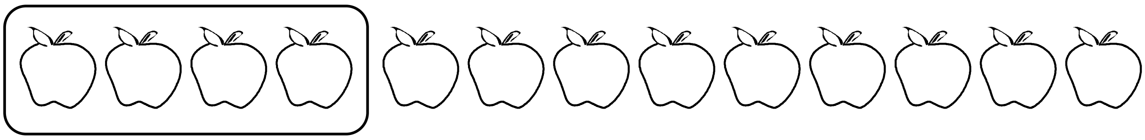

圖　六

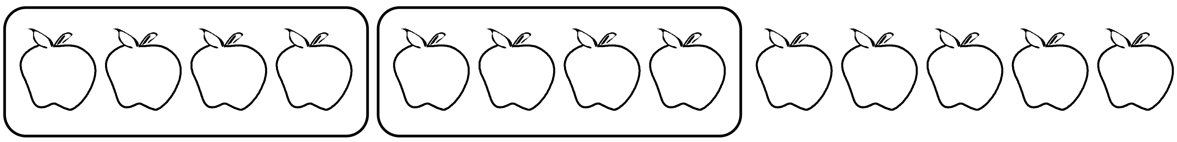

圖　七

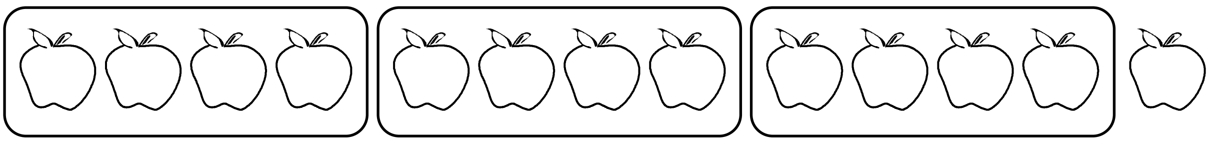

圖　八

操作完成之後，也得到兩個數，就是造得蘋果的包數和餘下的蘋果數量。比較兩種不同的操作的結果，可以看出，蘋果 13 個，平均放入 4 個盒子，每個盒子的蘋果數量，等於蘋果 13 個，每 4 個一包，所造得的包數；而且兩種情況下的餘數也相等。如果讓學生檢視更多例子，不難發現，一般而言：

> 蘋果 a 個，均分 n 份（$n>0$），每份的個數等於每 n 個一包所得的包數（設該數為 q）。在兩種情況下，餘下的蘋果個數相等，都是 r，而且 $0 \le r < n$。

只要把圖四和圖八合併並加以一般化，就可以表達這種現象（圖九）。

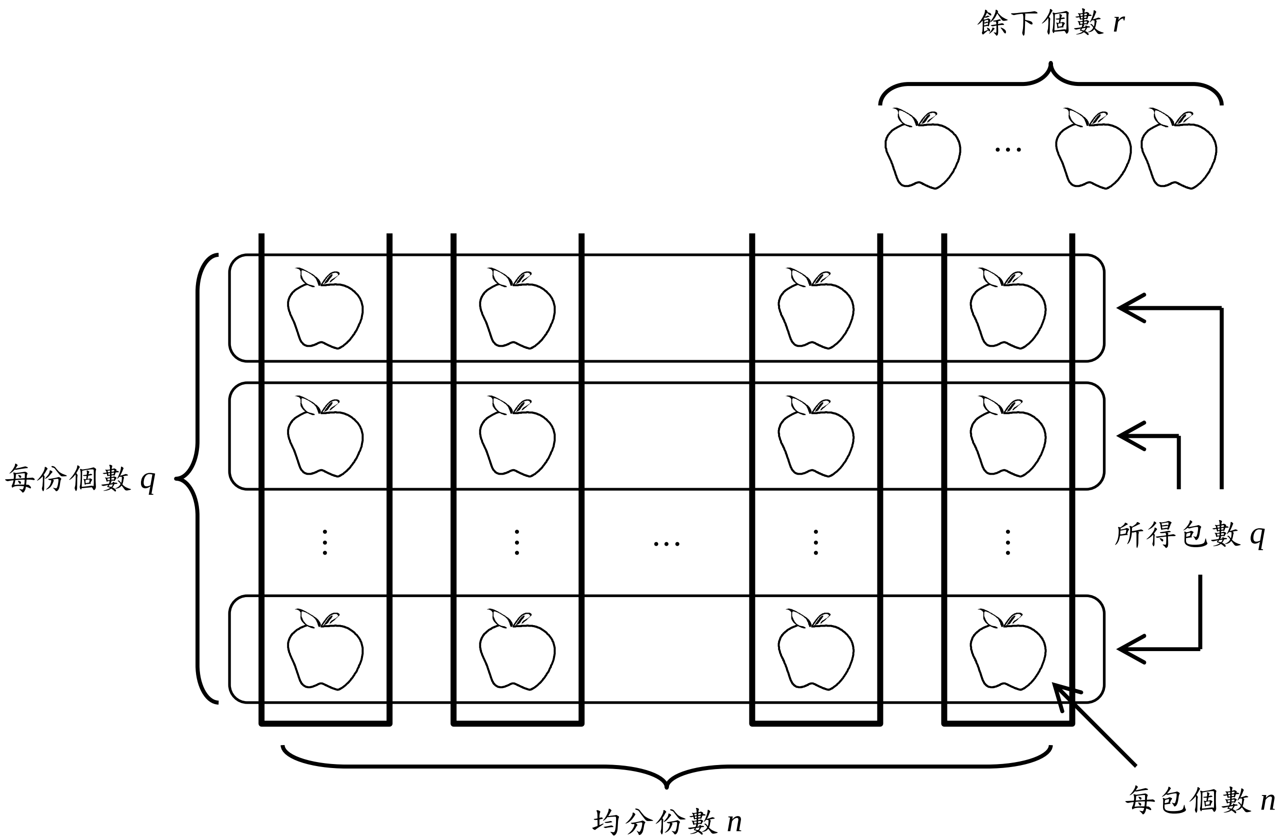

圖　九

有了這個發現，才可令人心安理得地以同一算式，表示兩種不同操作的結果如下：

$$a \div n = q \ldots r$$

這兒的「÷」叫「除號」，算式叫「除式」。算式中的 a 叫「被除數」，是「均分」或「分組」（亦稱「包含」）操作的總數；n 叫「除數」，是「均分」的份數或「分組」的每組個數；q 叫「商」，是「均分」得出的每份個數或「分組」得出的組數；r 叫「餘數」，是餘下的個數，最小值是 0。無論是哪種操作，餘數 r 都小於除數 n，不然，就可以每份多分 1，或多造 1 組。當 $r = 0$，便稱「n 整除 a」、「n 是 a 的因數」或「a 是 n 的倍數」。

由於兩種操作的具體意義不同，因此做成除式上各數的單位，在均分時是被除數、商和餘數相同，在分組時卻是被除數、除數和餘數相同的不一致局面。

整數除法和乘法的關係

從上面的除法概念引入可以得知，我們不能簡單地把除法看成是乘法的逆運算。如果把 m 乘以 n 等於 k 的關係（$m \times n = k$），改寫成 k 除以 n 等於 m（$k \div n = m$），就說除法是乘法的逆運算，是妄顧於非整除的情況下，整數除法仍然有其獨立意義的事實。從學生的角度看，整數的乘法和除法是明顯不可能互爲對方的逆運算的，因爲整數乘法運算的結果是一個數（積），而整數除法運算的結果卻是兩個數（商和餘數）。要說明整數乘法和整數除法的關係，就要用含有乘法的算式，表示除法的結果。這方式慣見於數學文獻，其中除法定理通常是這樣表達的：

> 對任意非負整數 a、正整數 n，存在唯一整數 q 和 r，使
> $a = nq + r$ 和 $0 \le r < n$ 同時成立。

對首次接觸高等數學的表達方式的人而言，以這樣的方式表達除法確是頗爲嚇人。沒有除號的除法定理是第一奇怪，加入「存在唯一」這個詞語是第二奇怪，這些都要稍作解釋。首先，當學生學了整數和分數除法之後，算式 $13 \div 4$ 中的除號便可以有兩種意義：（一）視爲整數除法，就應該寫 $13 \div 4 = 3 \ldots 1$；（二）視爲分數除法，就應該寫 $13 \div 4 = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$。因此，除號的應用便出現了歧義。以乘和加混合算式表達，便能清楚顯示整數除法，及其衍生的兩個數（商 q 和餘數 r），杜絕混淆。另一不用除號的理由就是有了中學的代數之後，在包含有理數的數域（實數、複數等）之內，除法都被視爲乘法的逆運算，而且都用分線表達，除號便變得可有可無了。其次，如果只要求運用乘和加混合算式表達 13 和 4 的關係，以下幾個算式都是正確的，但當中只有第一式可以顯示依除法所得的商和餘數：

$$13 = 4 \times 3 + 1$$

$$13 = 4 \times 2 + 5$$

$$13 = 4 \times 1 + 9$$

因此，除法定理要求在算式 $a = nq + r$ 中的 r 要同時滿足 $0 \le r < n$。這麼一來，r 的選擇便只有一個，隨之而來 q 也變成唯一。

整數除法的計算

上面介紹了除法的概念取自具體的均分和包含兩種操作，在未找到純符號的計算方法之前，已知被除數和除數，要找商和餘數，只能老實地以實物操作完成。然而，小心檢視 $a = nq + r$ 及 $0 \le r < n$，便知道「計算 a 除以 n，即是從除數 n 的倍數中，找出那個最接近但不超過被除數 a 的倍數 nq，找到了便知商是 q，而餘數 r 就是 $a - nq$。」換言之，不進行實物操作，可以口誦乘數表代替，順序找出除數 n 的各個倍數 $n \times 1$、$n \times 2$、…，直至找到 $n \times q$，滿足 $n \times q \le a < n \times (q + 1)$ #。以 $13 \div 4$ 為例，我們可以口誦乘數表 $4 \times 1 = 4$、$4 \times 2 = 8$、…，代替進行實物操作的各個階段如下：

口誦乘數表	進行實物操作的對應
$4 \times 1 = 4$ $4 \le 13$	均分 4 份，當每份分得 1 個時，共分去 4 個。 每包 4 個，當造得 1 包時，共包去 4 個。
$4 \times 2 = 8$ $8 \le 13$	均分 4 份，當每份分得 2 個時，共分去 8 個。 每包 4 個，當造得 2 包時，共包去 8 個。
…	…
$4 \times q = 4q$ $4q \le 13$	均分 4 份，當每份分得 q 個時，共分去 $4q$ 個。 每包 4 個，當造得 q 包時，共包去 $4q$ 個。 同時，$4q \le 13$。
$4 \times (q + 1) = 4(q + 1)$ $4(q + 1) > 13$	均分 4 份，當每份分得 $(q + 1)$ 個時，共分去 $4(q + 1)$ 個。 每包 4 個，當造得 $(q + 1)$ 包時，共包去 $4(q + 1)$ 個。 可是 $4(q + 1) > 13$，實際不可能，因此上一個數 q 就是要找的商。

最後，口誦乘數表，得知 $4 \times 3 = 12 \le 13$，而 $4 \times 4 = 16 > 13$，就可確定商就是 3，接著用 $13 - 4 \times 3 = 1$ 就可找到餘數。用直式計算，13、4、3、12 和 1，會順序地出現在左下方的式子，而這些數在除法計算中的確切意義可以由右下方的式子說明。

$n \times q \le a < n \times (q + 1)$ 的另一等價式是 $0 \le a - n \times q < n$。

	3		商
4	13	除數	被除數
	12		最接近但不超過被除數的那個除數倍數
	1		餘數

要口誦乘數表，一次過找到關鍵的「最接近但不超過被除數的那個除數倍數」，端視所背誦的乘數表有多大。在除數和商都是一位數的情況下，10 以內的乘數表已經足夠。當除數是一位數，而商卻是超過一位時，除了向上試誤的方法之外，也可進行分階段計算。簡單來說，就是逐步均分（不必另行考慮包含的情況，因上述發現告訴我們得出的數值與均分無異），直至不能再分為止。直式的計算會多次從被除數取走某一數值均分，形成多步計算，下面是一個例子，及算式各部分的說明。

		4	第三次每份分得
		9	第二次每份分得
		10	第一次每份分得
均分的份數	4	93	均分的總數
		40	第一次分去
		53	第一次分去後剩下
		36	第二次分去
		17	第二次分去後剩下
		16	第三次分去
		1	第三次分去後剩下

當剩下的小於除數，均分工作便得停止，最下方的就是餘數（即 1），而商就是被除數上方的各數之和（即 $4 + 9 + 10 = 23$）。由於要分三次從 93 先後減去 40、36 和 16，故有人說除法即是連減法。這說法雖不準確，但也捕捉了除法運算的重要特徵。今天要求小三學生掌握的，是這種做法的精煉版本，演示和解說見於馮（1999）及馮、王、葉、何（2000），此處從略。小學整數除法計算的最困難階段，出現於除數超過一位的時候。如果學生心算能力不足，可以列寫乘式，實行以筆算（而非心算）試商。此法亦見於馮、王、葉、何（2000），此處不贅。

分數[†]除法的概念

整數除法的概念，源於均分和包含兩種操作，兩者均可順利延伸至分數計算。如果除數是整數，我們可以有均分和包含兩種理解。例如 $1\frac{3}{4} \div 2$ 的具體意義，可以是把 $1\frac{3}{4}$ 升的開水，均分 2 份，其中一份是多少升開水；也可以是 $1\frac{3}{4}$ 升的開水，注入容量爲 2 升的水瓶，水瓶注滿了幾分之幾。前者是均分的推廣，後者是包含的推廣。無論是哪一種情況，我們都可以畫圖說明計算的過程。篇幅所限，細節暫且略去。

當除數是分數時，均分的理解會碰上少許障礙，但包含的理解卻仍可暢通無阻地推廣。把前段例子的 $1\frac{3}{4} \div 2$ 中的 2 換成 $2\frac{1}{2}$，包含的理解仍然有效，只是找答案時也許會較繁複而已。如果把均分的說法稍作修改，$1\frac{3}{4} \div 2\frac{1}{2}$ 仍然可以從均分的角度推廣。例如，$2\frac{1}{2}$ 份開水共有 $1\frac{3}{4}$ 升，每份開水就有 $(1\frac{3}{4} \div 2\frac{1}{2})$ 升。因此，均分和包含兩種理解，都可以推廣至分數的除法運算。然而，這兒說的，皆是兩分數相除，得一分數的計算，與整數除法的本質是不同的。

帶餘除法

當被除數 A 和除數 B 都是整數的時候，一般而言，在 B 的倍數中，那個最接近但不超過 A 的倍數不一定等於 A，亦即是說，A 除以 B 的餘數不一定是 0。換言之，因為限制了商 Q 是整數，所以無法確保餘數 R 是 0。算式只能像下面這樣寫：

$$A \div B = Q \ldots R\text{，其中 } 0 \le R < B\text{。}$$

反過來，如果硬要餘數 R 是 0，就無法限制商 Q 是整數。換言之，因為限制了餘數 R 是 0，所以無法確保商 Q 是整數。算式只能像下面這樣寫：

$$A \div B = Q\text{，其中 } Q \text{ 不一定是整數，一般是個分數。}$$

† 本文以「分數」代表非負有理數。

把上面 A、B 推廣至有理數，如果要從 B 的整數倍中，找出那個最接近但不超過 A 的整數倍 BQ，就叫做進行帶餘除法。前面提及的除法定理，有以下的推廣版本：

> 對任意非負有理數 A、正有理數 B，存在唯一整數 Q 和有理數 R，使 $A = BQ + R$ 和 $0 \le R < B$ 同時成立。

相反地，如果要求餘數是 0，就叫做進行不帶餘除法，即是小學課程內的分數除法，是有理數的除法，計算只會得出一個商 Q。

從分數應用的層面看，帶餘除法確有實際應用。例如 $\frac{1}{3}$ 米絲帶可造花一朵，現有絲帶一條長 $2\frac{1}{2}$ 米，要知可造花多少朵，就要計算 $2\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$ 的帶餘除法。

分數帶餘除法的計算

由於分數不帶餘除法的運算法則相當簡單，分數帶餘除法的計算便顯得相對複雜。例如要計算 $6\frac{2}{5} \div 1\frac{3}{4}$，最原始的方法就是計算 $1\frac{3}{4} \times 1$、$1\frac{3}{4} \times 2$、⋯，直至找到 $1\frac{3}{4} \times Q \le 6\frac{2}{5} < 1\frac{3}{4} \times (Q+1)$ 爲止。花點時間，便可得出：

$$6\frac{2}{5} \div 1\frac{3}{4} = 3 \ldots 1\frac{3}{20} \text{。}$$

當中的 $1\frac{3}{20}$，是從 $6\frac{2}{5} - 1\frac{3}{4} \times 3$ 得出。用包含理解，就是說 $6\frac{2}{5}$ 包含了 3 個完整的 $1\frac{3}{4}$，餘下的是 $1\frac{3}{20}$，不足 1 個 $1\frac{3}{4}$。除了上述向上試誤（即試商）的方法可以找到商是 3 之外，藉著方便的不帶餘除法的運算法則，很快便可找到 $6\frac{2}{5} \div 1\frac{3}{4} = 3\frac{23}{35}$，表示 $6\frac{2}{5}$ 是 $1\frac{3}{4}$ 的 $3\frac{23}{35}$ 倍，即大於 3 倍但小於 4 倍。這個不帶餘除法的商的整數部分，與帶餘除

法的商是相同的。因此，我們可以迂迴地藉計算不帶餘除法的商，求帶餘除法的商，然後再用

$$\text{餘數} = \text{被除數} - \text{除數} \times \text{商} \qquad (*)$$

找餘數。想盡用算得的不帶餘除法的商，也可乾脆以不帶餘除法的商的分數部分，乘以除數，也可求得餘數。

小數帶餘除法的計算

小數是十進分數，乃分數的一個特類。前述計算分數帶餘除法的方法，自然全部適用於小數。若把 $6\frac{2}{5} \div 1\frac{3}{4}$ 轉爲小數除法問題，就是 $6.4 \div 1.75$。我們有下列方法可用：

方法一　從 $1.75 \times 3 \le 6.4 < 1.75 \times 4$ 得知帶餘除法的商是 3，再由 $6.4 - 1.75 \times 3 = 1.15$ 得知帶餘除法的餘數是 1.15。

方法二　從不帶餘除法 $6.4 \div 1.75 = 6\frac{4}{10} \div 1\frac{75}{100} = \frac{640}{175} = 3\frac{23}{35}$ 得知帶餘除法的商是 3，再用 $6.4 - 1.75 \times 3 = 1.15$ 求得帶餘除法的餘數是 1.15。

方法三　從不帶餘除法 $6.4 \div 1.75 = 6\frac{4}{10} \div 1\frac{75}{100} = \frac{640}{175} = 3\frac{23}{35}$ 得知帶餘除法的商是 3，再用 $\frac{23}{35} \times 1.75 = 1.15$ 求得帶餘除法的餘數是 1.15。

無論方法二或方法三，都要面對把 $\frac{640}{175}$ 化爲帶分數的一步。如果不先約簡，就要進行以下的計算：

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline 175 & 640 \\ & \underline{525} \\ & 115 \end{array} \qquad (1)$$

除了小數點外，整個計算活像是在進行 $6.4 \div 1.75$ 的帶餘除法，所差的只是被除數、除數和餘數都變成了原本數值的 100 倍。一般而言，把被除數和除數同時乘以 m，然後進行帶餘除法，商是不變的，只有餘數會相應地乘以 m。這結果可從關係式（*）中看到（見附錄），由此衍生了以下廣爲課本採用的方法。

方法四　把被除數和除數同時乘以 m，使兩數都變成整數，然後以整數帶餘除法計算（即慣用的長除式）。算得的商便是原式帶餘除法的商，算得的餘數便是原式帶餘除法的餘數的 m 倍。

方法四常用的 m，都是 10 的冪（10、100、1000、⋯），效果就是把小數點向右移動，使得被除數和除數同時變成整數。不過，好抬槓的也可選其他數值。例如，把 $\frac{640}{175}$ 化爲帶分數，先約簡會得 $\frac{128}{35}$。計算 $128 \div 35$，等同把原式 $6.4 \div 1.75$ 的兩數同時乘以 20 然後計算。得出的商與原數相同，而餘數卻會是原數的 20 倍。以下長除式的各數，可驗證這做法可行。

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \cline{2-2} 35 & 128 \\ & \underline{105} \\ & 23 \end{array} \qquad (2)$$

方法四甚至可以回過頭來，處理分數帶餘除法的計算。以 $6\frac{2}{5} \div 1\frac{3}{4}$ 爲例，只要把 $6\frac{2}{5}$ 和 $1\frac{3}{4}$ 同時乘以 20（或 20 的倍數，即兩分母的公倍數），就可回到（2）式、（1）式，以至其他整數長除式運算。當然算出的餘數，必須相應地除以早時乘上的數，才是 $6\frac{2}{5} \div 1\frac{3}{4}$ 分數帶餘除法的餘數。

長除式的應用

綜合上文的討論，可見長除式是最直接和常用的計算工具。在整數帶餘除法的計算，它可直接給出要找的商和餘數；在分數以至小數的帶餘除法的計算，它也扮演著重要的角色。那麼，爲甚麼我們不能直接運用長除

式，完成全部帶餘除法的計算？啓動我們的想像力，不難造出下列算式：

$$\begin{array}{r|l} & \;\;3 \\ \hline 1\,\frac{3}{4} & 6\,\frac{2}{5} \\ & 5\,\frac{1}{4} \\ \hline & 1\,\frac{3}{20} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & \;\;3 \\ \hline 1\,\frac{15}{20} & 6\,\frac{8}{20} \\ & 5\,\frac{5}{20} \\ \hline & 1\,\frac{3}{20} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & \;\;3 \\ \hline 1\,\frac{75}{100} & 6\,\frac{75}{100} \\ & 5\,\frac{25}{100} \\ \hline & 1\,\frac{15}{100} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 3\;. \\ \hline 1\,.\,7\,5 & 6\,.\,4 \\ & 5\,.\,2\,5 \\ \hline & 1\,.\,1\,5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} & 3\;8 \\ \hline 1\,\frac{3}{4} & 6\;7\,\frac{2}{5} \\ & 5\;2\phantom{\frac{2}{5}} \\ \hline & 1\;4\,\frac{9}{10} \\ & 1\;4\,\frac{1}{2} \\ \hline & \frac{9}{10} \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} & 3\,8\;. \\ \hline 1\,.\,7\,5 & 6\,7\,.\,4 \\ & 5\,2\,.\,5 \\ \hline & 1\,4\,.\,9 \\ & 1\,4\,.\,0 \\ \hline & 0\,.\,9 \end{array}$$

篇幅所限，只好略去解說，留待讀者自行推敲。要補充的，是這些算式都是正確的。少見，只因我們能背誦的乘數表太小、心算能力有限和小數點定位有些困難。

結語

有人也許會說，小學生何須算得那樣複雜。不錯，如果只關心能否找到答案，我們大可把工作交給計算器或電腦軟件，不勞學生抓破頭顱。筆者並不執著要教許多繁複的東西，只希望教師和學生都清楚自己正在做的是甚麼。

參考資料

香港課程發展議會（2000）。《數學課程指引（小一至小六）》。香港：教育署。

馮振業（1999）。《數學化教學：難點選編》。香港：作者。

馮振業、王倩婷、葉嘉慧、何妙珍（2000）。《數學化教學 — 除法》。香港：作者。

附錄

命題　計算帶餘除法時，若把被除數和除數同時乘以正整數 m，得出的商沒有改變，而餘數就相應地變成原值的 m 倍。

證明　以 A、B、Q、R 分別代表原本的帶餘除法的被除數、除數、商和餘數。

只要說明 $0 \le mA - mB \times Q < mB$，便可從 mB 的整數倍中，確定那個最接近但不超過 mA 的整數倍就是 $mB \times Q$，亦即表示 Q 就是帶餘除法 $mA \div mB$ 的商。

由帶餘除法 $A \div B$ 的商是 Q 便知 $0 \le A - B \times Q < B$，全式乘以 m 即所需結果。

從 Q 就是帶餘除法 $mA \div mB$ 的商可以推論，相應的餘數就是 $mA - mB \times Q = m \times (A - B \times Q) = m \times R$，即原帶餘除法 $A \div B$ 的餘數的 m 倍。

作者電郵：cifung@ied.edu.hk