來自身邊的四個小問題

胡奕偉
麗水學院數學系

這是一組來自筆者身邊的問題。問題 1 平凡，問題 2「簡單」，問題 3 略見抽象，問題 4 則源遠流長，被稱爲亞里斯多德旋輪悖論。平凡的問題呼喚靈活的思維，處理方法要創新；貌似簡單的問題，未必真正簡單，即使簡單，辯證地看，也可能蘊含深刻的數學思想方法；抽象問題需要具體化、直觀化、情景化；悖論要通過凝思來化解。

問題一

已知 m、$n \in \mathbf{N}^*$，且 $n \geq m \geq 3$。求證 $m \cdot n^m > (n+1)^m$。

這是一道頗爲「經典」的題目，幾本廣泛流傳的著作，都先後把它收錄其中。然而遺憾的是，時間雖然跨越多年，處理方法卻幾乎原地踏步，沒有任何實質性的進步，沒有體現出「代數研究，教學研究，習題研究三結合」應有的研究意味，沒有意識到這本身就是一個問題。

幾本書關於此題的解法都是，把兩個字母中的 n 視爲參數，對 m 作數學歸納法證明。具體過程爲：當 $m = 3$ 時，$3 \cdot n^3 = n^3 + 2n^3 \geq n^3 + 6n^2 = n^3 + 3n^2 + 3n^2 \geq n^3 + 3n^2 + 6n = n^3 + 3n^2 + 3n + 3n > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$。

假設當 $m = k$（$n \geq k \geq 3$）時，命題成立，即 $k \cdot n^k > (n+1)^k$。

$(k+1) \cdot n^{k+1} = (k+1)n \cdot n^k = (kn+n) \cdot n^k \geq (kn+k) \cdot n^k = (n+1)\, k \cdot n^k > (n+1)(n+1)^k = (n+1)^{k+1}$，即當 $m = k+1$ 時，命題也成立。因此，命題得證。

我覺得，至少可以加上一問：能否換一個思考角度，把 m 視爲參數，對 n 作數學歸納法證明呢？

當 $n = m$（$m \geq 3$）時，$\dfrac{m \cdot n^m}{(n+1)^m} = \dfrac{m \cdot m^m}{(m+1)^m} = m \cdot \dfrac{1}{(1+\frac{1}{m})^m}$。

由於數列 $\{(1+\frac{1}{m})^m\}$ 嚴格單調遞增，且當 $m\to\infty$ 時，極限為 e，$0<(1+\frac{1}{m})^m<e$。因此 $\dfrac{m\cdot n^m}{(n+1)^m}=m\cdot\dfrac{1}{(1+\frac{1}{m})^m}>m\cdot\dfrac{1}{e}>1$。

$\therefore\quad m\cdot n^m>(n+1)^m$，即當 $n=m$ 時，命題成立。

假設當 $n=k$（$k\geq m\geq 3$）時，命題成立，即 $m\cdot k^m>(k+1)^m$。

$\dfrac{m(k+1)^m}{(k+2)^m}=\dfrac{m\cdot k^m\cdot(k+1)^m}{k^m\cdot(k+2)^m}>\dfrac{(k+1)^m\cdot(k+1)^m}{k^m\cdot(k+2)^m}=\dfrac{(1+\frac{1}{k})^m}{(1+\frac{1}{k+1})^m}>1$，所以 $m(k+1)^m>(k+2)^m$，當 $n=k+1$ 時，命題也成立。因此，命題得證。

進一步問，能否不使用數學歸納法呢？

事實上，要證明 $m\cdot n^m>(n+1)^m$，只要證 $\ln m+m\ln n>m\ln(n+1)$，即 $\ln m>m\ln\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{m}{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$。

因為 $1<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e$，$0<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<1$，所以 $0<\dfrac{m}{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\dfrac{m}{n}$。又因為 $n\geq m\geq 3$，$\dfrac{m}{n}\leq 1<\ln 3\leq\ln m$，所以 $\ln m>\dfrac{m}{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$，即 $m\cdot n^m>(n+1)^m$。

康托說，數學的本質是自由的。就一道題而言，「自由」意味著思維的多種可能性，以及主體對於單一途徑的不滿足。

問題二

杭州《都市快報》2007 年 3 月 25 日第 4 版以大標題「面對這樣的小學二年級數學題，你有多大自信」給出一題：

按規律填數：2 , 3 , 7 , 18 , 47 , _________。

次日，該報第 3 版又以大半版的篇幅刊登有關上題的解答的報導：「有文化就是好，一道小學二年級數學題讓許多男人揚眉吐氣。」報導中提出：這一天共 112 位讀者發來電話、傳真或在網上聊天室發表意見，其中多數讀者都是叫苦：小學生做不出；小學生的老爸做不出；小學生老爸的辦公

室理的所有同事都做不出 ……。也有些讀者經過奮戰或與他人研究，得出解答。該報公佈的解法共六個，不過是用不同的湊法得到 123 而已。

我國數學開放題的研究專家戴再平先生認爲：該題從本質上看就是，已知數列的前 5 項依次爲 2、3、7、18、47，求第 6 項。更一般地，即求數列 $\{a_n\}$ 的通項公式。

觀察 $a_1 = 2$，$a_2 = 3$，$a_3 = 7 = 3a_2 - a_1$，$a_4 = 18 = 3a_3 - a_2$，$a_5 = 47 = 3a_4 - a_2$，即 $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2}$，其中 $n \geq 3$。所以 $a_6 = 3a_5 - a_4 = 123$。

更重要是，由於 $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)\cdot g(n)$（這理 $g(n)$ 是任意一個關於 n 的函數）也符合題意。因此，數列 $\{a_n\}$ 的通項公式有無窮多個。從而本題的答案也有無窮多個。但這些解答都已超出一個小學二年級學生的能力範圍。

這是一道在近年浙江省公務員考試中也多次出現的題。應該指出，另一角度的一般解法也不容忽視，這就是運用多項式的拉格朗日插值公式求出數列的通項公式：若已知點 $A_1(x_1, f(x_1))$、$A_2(x_2, f(x_2))$ $\cdots$ $A_n(x_n, f(x_n))$，則有通過這 k 個點的多項式函數 $f(x) = f(x_1)\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_k)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_k)} + f(x_2)\dfrac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_k)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_k)} + \ldots + f(x_k)\dfrac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1})}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\cdots(x_k-x_{k-1})}$。

本題所對應的多項式函數是

$$f(x) = 2\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)} + 3\cdot\frac{(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)} + 7\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)} + 18\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)} + 47\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-1)(5-2)(4-3)(5-4)}。$$

$\therefore\ f(6) = 112$。

根據有關研究，拉格朗日插值公式的推導可以運用中國剩餘定理中蘊含的「孫子思想」，即先作函數 $g_1(x)$，使 $g_1(x_1) = 1$，$g_1(x_2) = g_1(x_3) = \ldots = g_1(x_k) = 0$。這理可設 $g_1(x) = k_1(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_k)$，因爲 $g_1(x_1) = 1 = k_1(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_k)$，所以 $k_1 = \dfrac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_k)}$，即 $g_1(x)$

$= \dfrac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_k)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_k)}$。類似地，作函數 $g_i(x)$，$i = 2, 3, \ldots, k$，使 $g_i(x_i) = 1$，$g_i(x_1) = g_i(x_2) = \ldots = g_i(x_{i-1}) = g_i(x_{i+1}) = \ldots = g_i(x_k) = 0$。同理，$g_i(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_k)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)}$。最後設 $f(x) = f(x_1)g_1(x) + f(x_2)g_2(x) + \ldots + f(x_k)g_k(x) = f(x_1)\dfrac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_k)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_k)} + f(x_2)\dfrac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_k)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_k)} + \ldots + f(x_k)\dfrac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{k-1})}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\cdots(x_k-x_{k-1})}$。

當然，$F(x) = f(x) + (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)\, g(x)$（其中 $g(x)$ 是任意關於 x 的函數）也符合題意，從而通項公式也有無窮多個。本題運用拉格朗日插值公式角度的答案也仍然有無窮多個。

問題三

微軟公司有一年到北京大學招聘博士，其中的一道考題爲：

1000 個蘋果分裝成 10 箱，結果要求不拆箱，通過箱子的組合得到 1 至 1000 的任何數目的蘋果。如何分裝？

這是一道活用數學的題！

先探求方法。大數變小，1000 變成 10，得到一個更容易駕馭的問題：

10 個蘋果分裝成 4 箱，結果要求不拆箱，通過箱子的組合得到 1 至 10 的任何數目的蘋果。如何分裝？

如果記第 i 個箱子所分裝的蘋果個數爲 a_i，並且 $a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_3 = 2^2$，$a_4 = 10 - (1 + 2 + 2^2) = 3$，那麼 $1 = a_1$，$2 = a_2$，$3 = a_1 + a_2$，$4 = a_3$，$5 = a_1 + a_3$，$6 = a_2 + a_3$，$7 = a_1 + a_2 + a_3$，$8 = a_1 + a_3 + a_4$，$9 = a_2 + a_3 + a_4$，$10 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$。所以 1 至 10 的任何整數均可表示（表示方法可不唯一）爲 a_1、a_2、a_3、a_4 中若干個數的和，從而達到分裝後「不拆箱，通過箱子的組合得到 1 至 10 的任何數目的蘋果」的要求。

對於 1000 個蘋果而言，同理，如果記第 i 個箱子所分裝的蘋果個數爲 a_i，並且 $a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_3 = 2^2$，$a_4 = 2^3$，$\cdots$，$a_9 = 2^8$，$a_{10} = 1000 - (1 + 2 + \ldots$

$+ 2^8) = 489$，那麼 $1 = a_1$，$2 = a_2$，$3 = a_1 + a_2$，$4 = a_3$，$5 = a_1 + a_3$，$6 = a_2 + a_3$，$7 = a_1 + a_2 + a_3$，$8 = a_4$，⋯，$23 = 7 + 16 = a_1 + a_2 + a_3 + a_5$，⋯，$511 = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^8 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_9$，$512 = 23 + 489 = a_1 + a_2 + a_3 + a_5 + a_{10}$，⋯，$1000 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10}$。所以 1 至 1000 的任何整數均可表示（表示方法可不唯一）為 a_1、a_2、⋯、a_9、a_{10} 中若干個數的和，符合要求。

現在，我們來討論初等數論中的一道類似的題：

求證：$n = \sum_{d|n}\phi(d)$，其中 $d \in \mathbf{N}^*$。

這是一道略微抽象的題！這裡的歐拉函數 $\phi(x)$ 是定義在正整數上的函數，其值等於序列 $1 , 2 , 3 , \ldots , x$ 中與 x 互素的數的個數。

類似於蘋果裝箱問題的處理策略：大數變小，這裡我們可以「一般變特殊」。取 $n = 6$。由於 $(1 , 6) = 1$，$(5 , 6) = 1$；$(2 , 6) = 2$，$(4 , 6) = 2$；$(3 , 6) = 3$；$(6 , 6) = 6$，所以根據 $(i , 6) = d$（$i = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6$）的不同值，可以把 1、2、3、4、5、6 分成 4 類：與 $(i , 6) = 1$ 對應的集合為 $\{ 1 , 5 \}$，與 $(i , 6) = 2$ 對應的集合為 $\{ 2 , 4 \}$；與 $(i , 6) = 3$ 對應的集合為 $\{ 3 \}$，$(i , 6) = 6$ 對應的集合為 $\{ 6 \}$；再分別對每個集合元素的個數進行計數；最後累計得出全部元素的總個數為 6。

$$\begin{aligned} \therefore \quad 6 &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= (1 + 1) + (1 + 1) + 1 + 1 \\ &\quad \text{（各項分別對應於 } \{ 1 , 5 \}\text{、}\{ 2 , 4 \}\text{、}\{ 3 \}\text{、}\{ 6 \} \text{ 的元素個數。）} \\ &= \sum_{d|6}\sum_{\substack{(i,6)=d \\ 1\le i\le 6}} 1 = \sum_{d|6}\sum_{\substack{(\frac{i}{d},\frac{6}{d})=1 \\ 1\le \frac{i}{d}\le \frac{6}{d}}} 1 \end{aligned}$$

根據定義，$\phi(\frac{6}{d})$ 的值就是序列 $1 , 2 , \ldots , \frac{6}{d}$ 中與 $\frac{6}{d}$ 互素的數的個數，所以 $\sum_{\substack{(\frac{i}{d},\frac{6}{d})=1 \\ 1\le \frac{i}{d}\le \frac{6}{d}}} 1 = \phi(\frac{6}{d})$。$\therefore 6 = \sum_{d|6}\sum_{\substack{(\frac{i}{d},\frac{6}{d})=1 \\ 1\le \frac{i}{d}\le \frac{6}{d}}} 1 = \sum_{d|6}\phi(\frac{6}{d})$。

同時，由於 $6 = \frac{6}{d} \cdot d$，即 6 的正約數成對出現，$\{ \frac{6}{d} : d = 1 , 2 , 3 , 6 \} = \{ d : d = 1 , 2 , 3 , 6 \}$，所以 $6 = \sum_{d|6}\phi(\frac{6}{d}) = \sum_{d|6}\phi(d)$。

同理，$n=\sum_{d|n}\sum_{\substack{(i,n)=d\\1\le i\le n}}1=\sum_{d|n}\sum_{\substack{(\frac{i}{d},\frac{n}{d})=1\\1\le\frac{i}{d}\le\frac{n}{d}}}1=\sum_{d|n}\phi(\frac{n}{d})=\sum_{d|n}\phi(d)$ 。

大數變小（比如 1000 變成 10），一般變特殊（比如 n 變成 6），這是以退求進策略的積極運用。華羅庚先生多次強調：先足夠地退到我們所最容易看清楚問題的地方，認透了，鑽深了，然後再上去。這是我們解決數學問題的常用的有效策略。

問題四

一學生提問：

一個車輪在平坦的路面上直線滾動，如圖。點 A 滾過一周的同時，半徑 OA 的中 B 點也轉過一周，這樣，豈不是有 $2\cdot OA\cdot\pi=2(\frac{OA}{2})\pi$ 從而 $1=\frac{1}{2}$ 嗎？

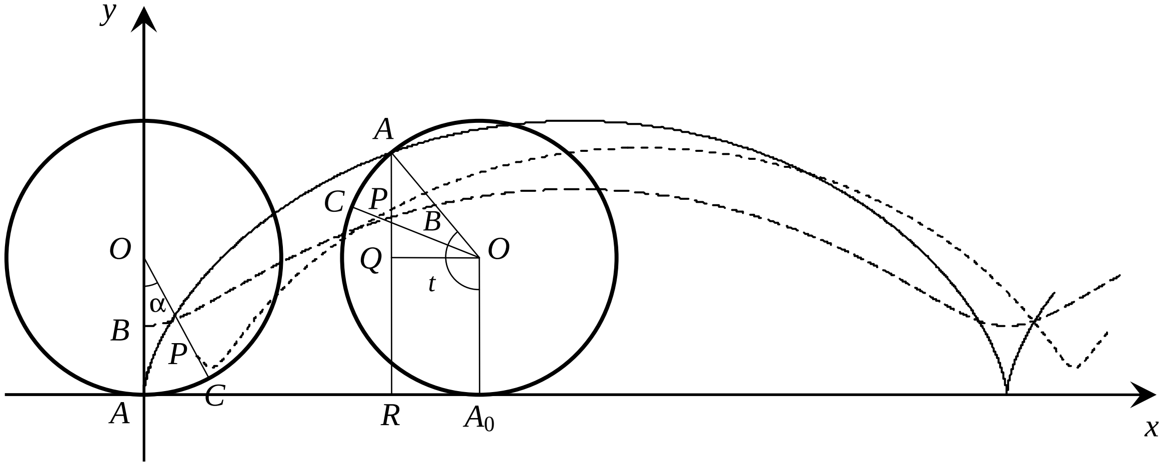
實際上，水平方向的滾動是由繞定軸的轉動（圓周運動）與在水平方向上的平移兩種運動複合而成的。

當車輪滾過一周的時候，點 A 在半徑爲 OA 的圓周上轉動了一周（即 $2\pi\cdot OA$），同時在水平方向上平移了 $2\pi\cdot OA$；而點 B 在半徑爲 $\frac{OA}{2}$ 的圓周上轉動了一周（即 $2\pi\cdot\frac{OA}{2}$），同時在水平方向上平移了 $2\pi\cdot OA$。所以，這個問題只能說明點 A 與點 B 向前平移的距離都是 $2\pi\cdot OA$，而它們作圓周運動的曲線距離分別爲 $2\pi\cdot OA$、$2\pi\cdot\frac{OA}{2}$，兩者並不相等。

事實上，車輪所在圓面上任意一點作平移運動的直線距離都相等。而由於 A 位於車輪外圓周開始滾動瞬間的最低點，所以在車輪滾動過程中，點 A 作圓周運動的曲線距離（即對應圓弧長度 $OA\cdot t$）與點 A 作平移運動的直線距離相等。由於 $OB=\frac{OA}{2}$，點 B 作圓周運動的曲線距離等於車輪所在圓面上任意一點作平移運動的直線距離的一半。更一般地，車輪上任意一點 P 作圓周運動的曲線距離等於車輪所在圓面上任意一點在水平方向上

作平移運動的直線距離的 $\dfrac{OP}{OA}$ 。

以上都是從滾動分解爲兩種簡單運動：圓周運動與平移運動的角度來看，進一步，如果從兩種簡單運動複合後的複雜運動的結果來考察，那麼，點 A、B、P 的軌跡我們都稱之爲旋輪線或擺線。如圖，點 $A(x\ ,\ y)$ 的方程爲：$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$，這裡的 $a = OA$。



布列方程的關鍵在於：一、在 x 軸上線段長 $AA_0 =$ 圓上 $\overset{\frown}{AA_0} = a \cdot t$；二、就 $\angle A_0OA = t$ 的瞬間位置而言，過圓周上的動點 A 作 x 軸的垂足 AR（R 爲垂足），再過點 O 作 AR 的垂線 OQ（Q 爲垂足），得到一個直角三角形 OQA，$OQ = a \cdot \cos(t - \frac{\pi}{2}) = a \sin t$，$AQ = a \sin(t - \frac{\pi}{2}) = -a \cdot \cos t$；三、動點 A 的橫坐標 $x = x$ 軸上線段長 $AA_0 - OQ$（即 $a \cdot t - a \sin t$），動點 A 的縱坐標 $y =$ 圓半徑 $a + AQ$（即 $a - a \cos t$）。

而點 $B(x\ ,\ y)$ 的方程爲 $\begin{cases} x = at - \frac{a}{2}\sin t \\ y = a - \frac{a}{2}\cos t \end{cases}$，方法如前。

車輪所在平面上任意一點 $P(x\ ,\ y)$ 的方程爲 $\begin{cases} x = at - OP \cdot \sin(t - \alpha) \\ y = a - OP \cdot \cos(t - \alpha) \end{cases}$。

佛家典籍《五燈會元》（宋・釋普濟）有云：「鴛鴦繡出從君看，不把金針度與人。」我國明代科學家徐光啓，針對學習《幾何原本》與習禪的不同，反其語曰：「金針度去從君用，未把鴛鴦繡與人。」其實，這也適用

於其他數學專業課程的學習。而對於作爲通識課程的數學（包括中小學數學）的學習，則要求我們：「鴛鴦既要繡出，金針亦須度盡」（張順燕先生語）。即教師不僅要探求並呈現數學理論的結果，而且還要把探求所採用的數學思想方法也充分暴露出來。可以發現，郭思樂先生長期致力的研究課題 ——「加強數學知識發生過程（數學思維過程）的教學」的理論意向與此吻合一致。我從內心對上述觀點深表贊同，在行動上也身體力行，「雖不能至，然心嚮往之。」還望讀者諸君不吝賜教。

參考文獻

余元希、田萬海、毛宏德（1988）。《初等代數研究（上冊）》。高等教育出版社。

羅增儒（1997）。《數學解題學引論》。陝西師範大學出版社。

張奠宙、張廣祥主編（2006）。《中學代數研究》，高等教育出版社。

戴再平（2007）。「數學解題研究，教育部數學教育高級研修班之專家報告」。寧波。

于秀源、瞿維建（2004）。《初等數論》。山東教育出版社。

張順燕（2004）。《數學的美與理》。北京大學出版社。

沈康身（2002）。《歷史數學名題賞析》，上海教育出版社。

郭思樂（1982）。「加強數學知識發生過程的教學，把傳授知識與培養能力統一起來」。《數學通報》。1982 年 9 月。

張貴欽（2005）。「教學敘事 — 教研活動的一種有效方式」。《數學教學》2005 年 4 月。

作者電郵：huyiwei@zj.com