

數學化教學：圓的認識

姚惠瑜、陳麗萍

英華小學

引言

小六有關圓的教學內容，分兩個課題。其一是圓的認識，其二是圓周率與圓周公式，建議各用 6 教節（香港課程發展議會，2000）。前者包括：

1. 認識圓的特性及圓心、半徑、直徑和圓周；
2. 用不同的方法作圓（45 頁）。

後者包括：

1. 認識圓周；
2. 探究圓周與直徑和半徑的關係；
3. 認識圓周率「 π 」；
4. 認識古代中國數學家找出圓周率的故事；
5. 應用圓周的公式（45 頁）。

一般的教學慣常依課程指引的建議，前段只介紹名稱和作圓的方法，既無計算，挑戰性亦不高。今年嘗試以數學化觀點把教學程序重編，務求加入多些思考元素，使學習不致沉悶及被動。

骨架方案

新構想把兩課連在一起重編，圓周公式的運用除外。爲了使圓心、半徑、直徑等概念循數學化軌道浮現，整套教學以「尋找最長的弦」入手。這樣引入，除了令學生得知直徑爲最長的弦之外，亦免卻純由教師介紹名稱的單向講授的弊病。探究的過程能使特性和名稱（直徑、圓心、半徑）自然地出現，讓學生主動學習，可謂一舉數得。由實驗和觀察得知

1. 最長的弦並不唯一，而且有無窮多

2. 在圓上任何一點，都有一條最長的弦連接
3. 每一條最長的弦都是圓的一條對稱軸
4. 最長的弦全部共點，這點是每一條最長的弦的中點

完成第 2 點便可引入直徑的意義：即圓上最長的弦；完成第 3 點便知道圓有無窮條直徑，它們都是圓的對稱軸；從第 4 點得知存在一點，叫圓心，與圓上所有點等距，即每一條連接圓心和圓上一點的線段（叫半徑）都等長，此長度為直徑長度的一半。因此，圓是由一移動點，依固定距離環繞圓心走一圈所得的圖形。有了這些認識，介紹圓規的用法便有充分的學理基礎。

經一些作圓活動之後，教師總結前面經驗指出，只要有直徑的長度，圓的大小便已確定。換言之，單憑直徑已可確定圓周，即兩者之間必存在某種固定關係，於是展開圓周直徑關係的探討。接下來的，是慣見的動手找圓周和直徑的活動。預期得出的周徑比只會近似於 3，往後就是教師的講述。首先，引用墨經介紹古率周三徑一。然後以圓內接正六邊形的周界代替圓周，解釋古率的合理性（見圖一）。順理成章，講解增加內接多邊形的邊數，可使算得的周徑比更接近圓周率。爲了增強可信性，特別設計了 Sketchpad 課件，以顯示即使用上內接正 64 邊形，所得的周徑比也不過準確至兩小數位，從而令學生更能欣賞劉徽和祖冲之的成就。當介紹了劉徽和祖冲之的工作之後，便可介紹圓周率「 π 」的一些近似值。最後教師展示圓周率「 π 」的一百個小數位作結，令學生觀察得它是個無窮不循環小數，稱爲無理數。

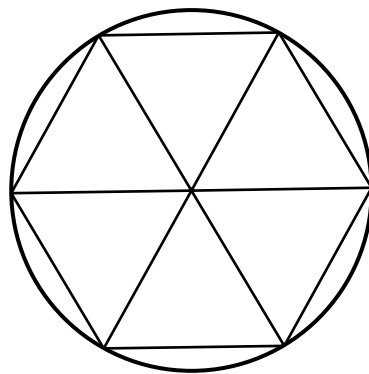


圖 一

教學流程

1. 直徑的發現

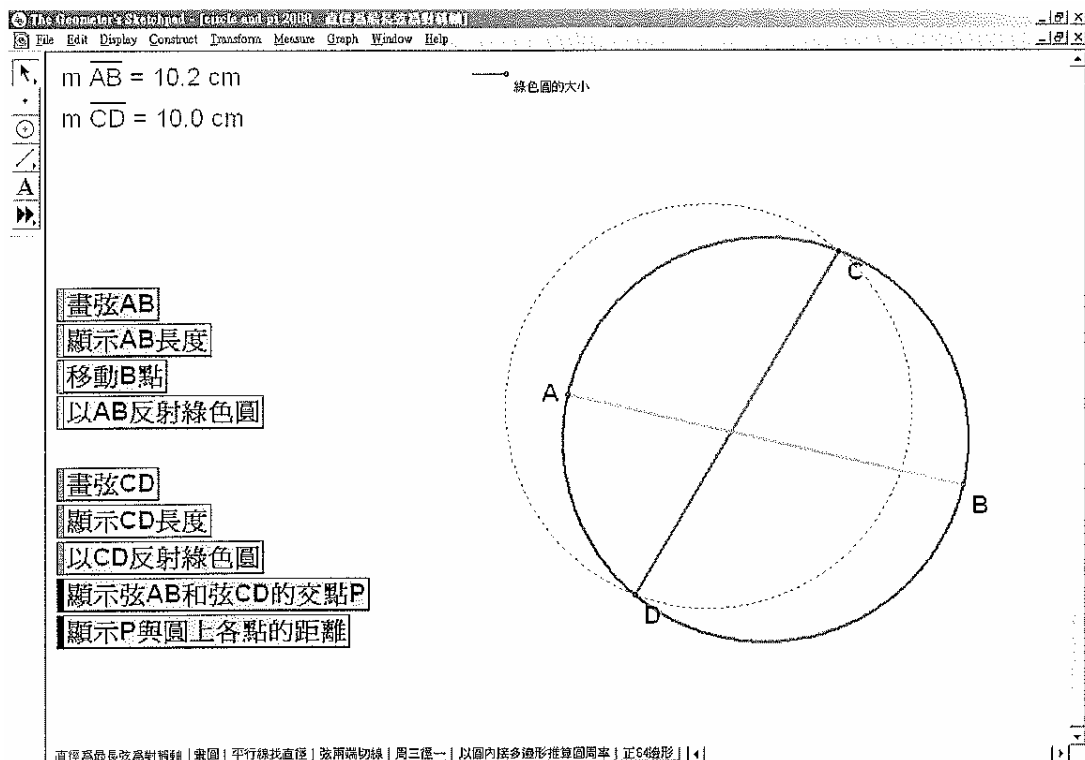
- 實施方法 :
- ◆ 給予學生相同圓形的工作紙（見附件工作紙 1a），著學生找出一條最長的弦（圓周上任兩點相連的直線）
 - ◆ 引導學生指出這條最長的弦亦是圓的對稱軸
 - ◆ 介紹圓上最長的弦稱為「直徑」
- 成效／反思 :
- 教學設計加入了需要思考的元素，因為學生要思考如何可以找出最長的弦及說明哪條就是最長的弦。觀察所見，有些學生用直尺由圓的一側逐漸移向逼近圓的中間，從而量出最長的弦。亦有不少學生會把圓形對摺來找出最長的弦，用這方法的學生會自己發現圓最長的弦亦即是圓的對稱軸。學生對直徑的意義有深刻的認識。

2. 介紹圓心及半徑

- 實施方法 :
- ◆ 提問學生：「一個圓是否只有一條直徑？」並著學生找出在同一圓上其他直徑。不斷提醒學生每找出一條直徑後，應進行量度檢定是否最長的弦。（如果比之前確立的直徑長，則可否決之前確立的直徑）
 - ◆ 引導學生細心觀察及發現：各直徑相交於一點
 - ◆ 討論：是否所有圓形內的直徑都有這個特性？
 - ◆ 給予學生不同半徑的圓（工作紙 1b），找出每個圓的直徑進行討論。
 - ◆ 引導學生細心觀察這一點的特別之處：
 - ❖ 這點與圓周上任一點的距離相等
 - ❖ 這點是直徑的「中點」
 - ◆ 介紹直徑的共點稱為「圓心」
 - ◆ 介紹圓心與圓周上任一點的距離稱為「半徑」
 - ◆ 引導學生發現直徑是半徑的 2 倍

- ◆ 提問：是否由圓上任一點均可畫出直徑？如何畫出？（由圓上任一點通過圓心均可畫出直徑）
- ◆ 討論：如何檢定一條弦是否直徑？（只要通過圓心的弦便是直徑）
- ◆ 利用 Sketchpad 課件，展示最長的弦都是對稱軸（如圖二）

成效／反思：學生透過動手親自找出同一圓上不同的直徑，又要求他們要進行量度去檢定，培養他們對學習數學的認真態度。若只用直尺量度來找出圓內多條直徑的同學，因為量度時會出現少許誤差，各直徑未能相交於一點，但各直徑都會在圓的中心位置附近經過。因此利用 Sketchpad 課件可協助解釋，如果當誤差修訂後，各直徑就會相交一點一圓心。他們經過動手做、驗證、觀察、討論及老師的引導，大部份學生能夠發現及說出圓心、直徑和半徑的特性及關係，不用老師多講，也不是老師單方面的灌輸，學生能對學習重點有較深刻的認識。



圖二

3. 介紹圓規畫圓的原理

實施方法 : 利用 Sketchpad 及圓規展示如何用不同的直徑畫出不同大小的圓。

成效／反思 : Sketchpad 是一個很實用的軟件，而且比在黑板上用大圓規畫圓容易得多，學生亦覺得十分有趣。

4. 直徑與圓周的關係

實施方法 : ◆ 與學生討論：圓周的長短與什麼有關？它們的關係有沒有特別的規律？

◆ 找出關係的方法：(工作紙 2)

❖ 粗疏的方法：用繩量度早前在堂課簿內畫出的圓的圓周，再與該圓的直徑比較，找出一個無規範的圓周率（可能介乎 2 至 4 之間）

❖ 較精密的方法：用量度圓內接多邊形周界的方法

$$\text{圓內接多邊形的周界} < \text{圓周}$$

$$\frac{\text{圓內接多邊形的周界}}{\text{直徑}} < \frac{\text{圓周}}{\text{直徑}}$$

❖ 利用 Sketchpad 展示圖一，推論出 $\pi > 3$

$$\text{因為 圓內正六邊形周界} = \text{直徑} \times 3$$

$$\text{圓周} > \text{圓內正六邊形周界}$$

$$\text{所以 圓周率} > 3$$

❖ 學生用量度圓內接多邊形周界的方法找出圓周，找出一個較精密的圓周率

❖ 利用 Sketchpad 畫出多個不同的圓內接多邊形，從而展示推算圓周率方法的由來

❖ 進行量度圓外接多邊形周界的方法，進行相類似的運算，以找出圓周率的範圍

成效／反思 : 在用圓內接多邊形來找出圓周率的活動中，老師爲了讓學生減省大量的量度及運算時間，老師不規限學生要用正多邊形，學生可隨意在圓內繪畫一 n 邊形 ($n > 10$)，

並在紙條刻上各邊的長度，再用直尺量度一次找出周界，以作計算。大部份的學生計算出的圓周率都很貼近常用的 3.14。學生在這活動中都顯得十分投入，找到貼近常用的 3.14 的圓周率更顯得很開心及興奮，氣氛十分好。上述的教學設計讓學生再次體驗數學化教學所強調讓學生有些較完整的數學經驗，使他們明白數學產物（圓周率），由粗疏到精密的演變過程，經歷類似劉徽和祖冲之的工作。而且過程中亦培養了學生細心操作、認真計算、觀察、思考及推論等能力。

總結

整個設計以學生動手操作，觀察和歸納為主，聽教師講解為輔。在整個教學過程中，筆者覺得跟以往此課題的教學最大不同之處有兩點：1. 以往是老師直接講述多，今次是學生自行發現及講述多。2. 今次學生比以往多時候要動手做、思考、觀察、歸納及講述，除了學到新的知識外，也是能力的培養。至於學習氣氛亦十分良好，學生不覺沉悶，大部份都表現得投入及有興趣。最後礙於學生的數學知識不足，當講解增加內接多邊形的邊數，使算得的周徑比更接近圓周率時，無法向學生作出任何演繹推論，但借助動態幾何軟件 Sketchpad 製作課件，對加強解說的說服力，有實質的幫助，效果十分良好。

參考資料

香港課程發展議會（2000）。《數學課程指引（小一至小六）》。香港：教育署。

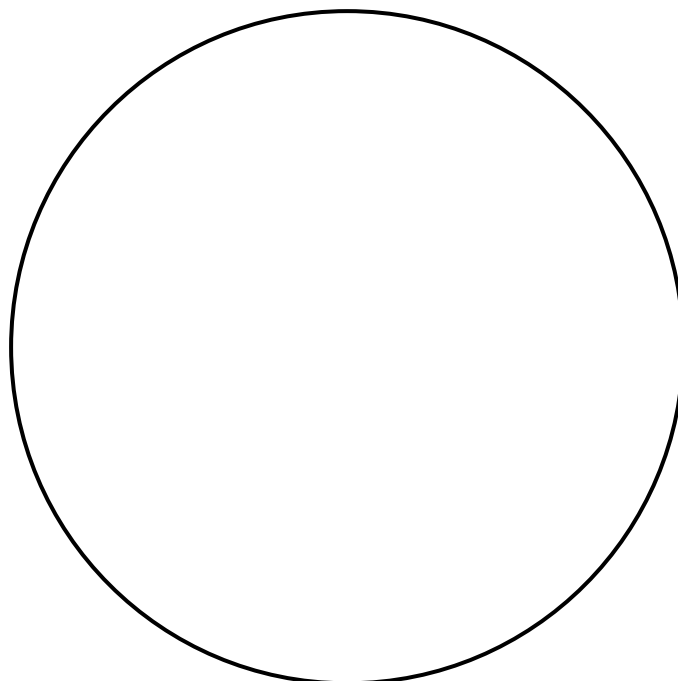
作者電郵： missyiu2005@yahoo.com.hk

pansyclp@yahoo.com.hk

附件

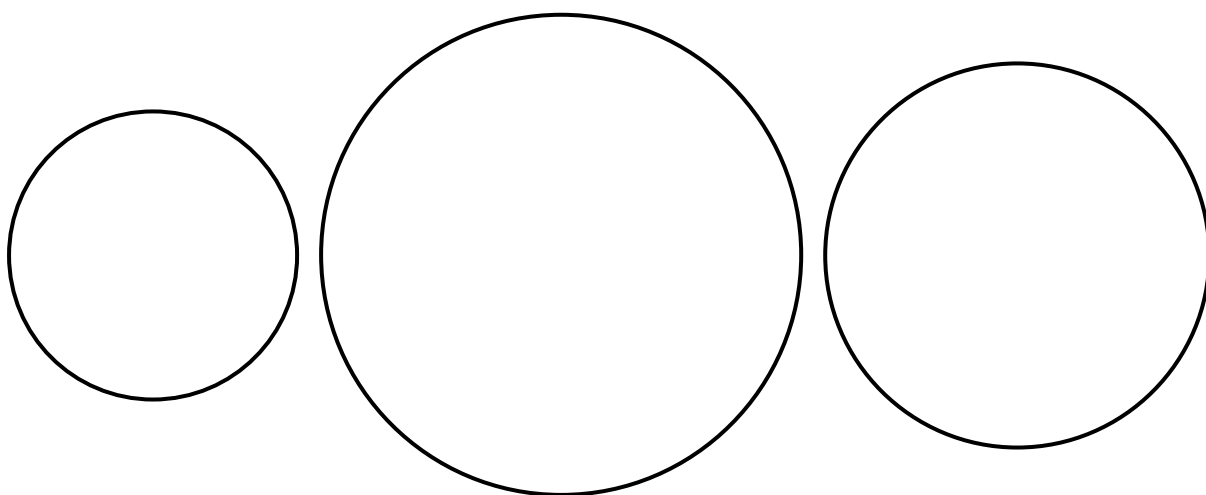
工作紙 1a

在圓上找出一條最長的弦。



最長的弦長度是_____cm。

工作紙 1b



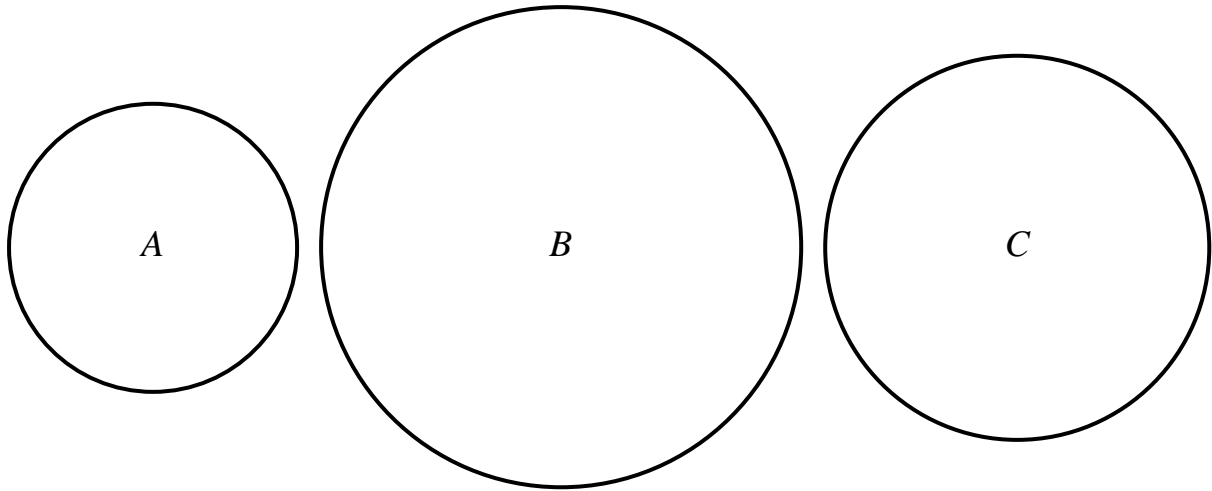
直徑是_____cm。

直徑是_____cm。

直徑是_____cm。

工作紙 2

量度下列各圓周界的長度，並把結果記錄在表內：



	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
直徑 (cm)			
圓周 (cm)			

觀察上表的量度結果，直徑和圓周有什麼特別關係嗎？