

數學化教學：方向系統

馮振業

香港教育學院數社科技學系

葉嘉慧、盧錦雄

香港浸信會聯會小學

緒論

坐標系統是由認識和描述空間衍生的數學產物。在中學階段常見的坐標系統包括（平面和立體）直角坐標系統和極坐標系統，還有在地理科會碰到的球面經緯坐標系統。不論是上述哪一種系統，都離不開方向或距離的描述。

方向的描述，離不開角的概念。極坐標系統中的極角、航海用的方位角、經線和緯線的定義，無不建基於角的認識。即使運用直角坐標系統，坐標軸的關係仍舊逃不過以（直）角來表達。

從數學化觀點看，方向系統不及坐標系統精密，因前者只可指示方向，不能確定位置。然而，精密的系統往往較為複雜，所需的知識亦較多。因此，坐標系統只在中學階段引入，在小學階段就只有方向系統這個較簡陋的數學產物。

和其他度量課題一樣，角的量度必須有個單位。除了天馬行空的自訂單位之外，在小學階段碰到的第一個角的公認單位就是直角。透過把一周角等分四份，我們便得到直角——一個相當粗疏的量度單位。在未有掌握比一個直角更精細的角的單位之前，只能進行相對粗疏的方向指示，即小學二年級的四個主要方向。隨著更精細的角的單位的出現，方向指示理應可以做得更精確些。然而，新課程把以「度」量度角的部分移走了，使直角變成小學課程內，角的唯一單位。換言之，在小五把四個主要方向改良為八個方向的工程上，我們不能用「 45° 角」，卻要用「半個直角」。無論如何，由四個主要方向的「東」、「南」、「西」、「北」，走向八個方向的「東」、「東南」、「南」、「西南」、「西」、「西北」、「北」、「東北」，是體現了數學化觀點下，數學產物由粗疏邁向精密的演變過程。

本文旨在報告我們以數學化觀點，設計和施行小二四個主要方向的教學的一些思路和實踐觀察。

引出主體內容

數學化教學設計的其中一項重要特質，就是主體內容必須遵循由無到有，由粗疏變精密的推演過程（馮，2004，2007）。在小二四個主要方向的教學裏，學生大概已在生活經驗中，形成了「前後左右」作為慣用的方向指示系統。因此，要學生學習一個新的系統，必先讓他們看清原有系統的不足之處，並說明新系統如何突破這一點不足。

「前後左右」和「東南西北」兩個方向指示系統的根本分別，在於前者只適用於「前」方是一個可清楚定義，收發訊息的雙方都可有相同了解的環境。例如，人、車、小狗的前方都是可清楚定義的；紙杯、樹、海星的前方便不是容易清楚定義的。又例如，遠方有人傳你下列訊息，要你確定弦樂手的坐位編排，恐怕誤會在所難免：

1. 音樂室有四張依圖一放置的椅子，供小提琴手、中提琴手、大提琴手、低音提琴手坐下來練習之用

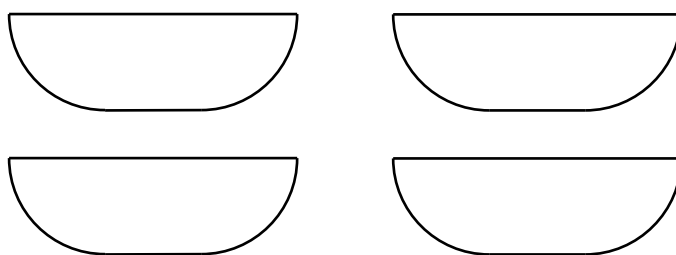


圖 一

2. 小提琴手坐在大提琴手的前方
3. 中提琴手坐在小提琴手的左方
4. 中提琴手坐在低音提琴手的前方

依照上述資料，可以畫出下列坐位表（圖二）：

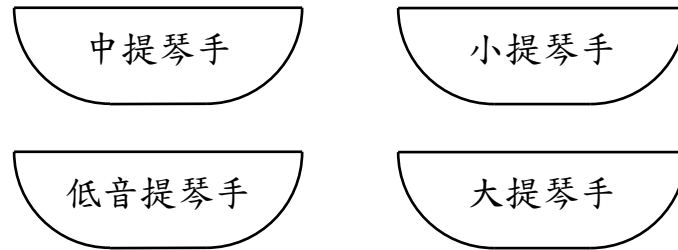


圖 二

這裏大提琴手就坐在低音提琴手的右方。

可是，不在現場的你，並不清楚椅子的面向，自然也不能確定下列情況（圖三）會否出現：

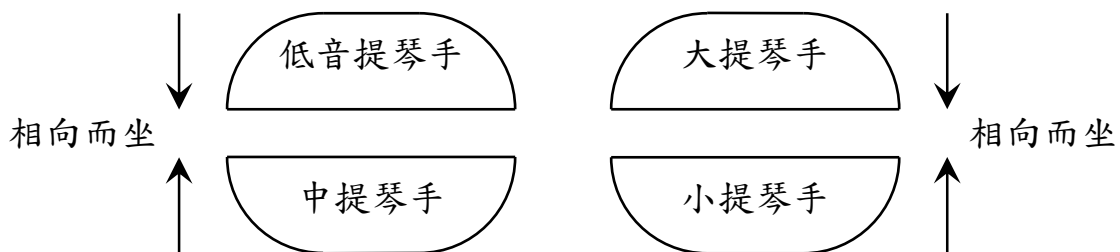


圖 三

這裏大提琴手就坐在低音提琴手的左方！

上述例子說明了為甚麼「前後左右」這個方向指示系統一般只供生活應用，而且通常只用於收發訊息的雙方共處的細小的範圍。

相反地，「東南西北」這個方向指示系統，在地球上大部分地方均可使用，不必局限於收發訊息的雙方共處的細小的範圍。例如，不論我們身在何方，也不論一位身在尖沙嘴海旁的朋友面向何方，都可以告訴他（她）灣仔就在他（她）的南方。

從應用的角度看，「前後左右」系統的前方要透過相關個體的面向局部地確定，不同的個體會有不同的前方。當前方確定了，其餘的可輕易按個體的面向找出。反觀「東南西北」系統，卻需依賴一些科學知識去確定四個方向的其中之一，其餘的才可依固定數學程序求得。例如，以日出和日落確定東方和西方、以指南針確定南方和北方，都屬常用的定向方法。有了東、南、西、北其中之一，便可由順時針旋轉一至三個直角，確定其餘的三個方向。

觀察點的轉移

觀察點的爭拗，在「前後左右」系統算是歷久不衰，時常聽聞教師為下列問題（及其衍生的其他問題）爭論不休。

(a) 圖四中的小樹在凳子的哪一方？



圖 四

(b) 圖五中的小樹在女孩的哪一方？



圖 五

毫無疑問，(a) 的答案是左方。考慮到凳子本身沒有容許「前」、「後」、「左」、「右」可以準確地定義的特徵，觀察者別無他途，只有把自己的方向系統，加於圖片上，得出「左」方這個答案。

反觀 (b)，由於女孩本身有清楚的「前」、「後」、「左」、「右」方向，矛盾便產生了。到底是用觀察者的「前」、「後」、「左」、「右」，加於圖片上，還是用女孩本身的「前」、「後」、「左」、「右」？前者得出的答案與 (a) 一致，後者卻是不同的。有一種說法認為面對可定義「前」、「後」、「左」、「右」的個體，應優先考慮，在別無其他方向系統可用的情況下，才可把觀察者

的「前」、「後」、「左」、「右」，加於圖片之上。由此原則引伸的答案應是右方，而非 (a) 的左方。驟眼看來，引進這原則，好像消解了矛盾。然而，當我們把女孩放在凳子之上（圖六），我們是否願意說：「小樹在凳子的左方，同時小樹在女孩的右方」？如果從上空觀察（圖七），以 A 點代表小樹的位置，以 B 點代表女孩和凳子的位置，我們便好像說：「 A 在 B 的右方及左方」！



圖 六



圖 七

生活上使用的「前後左右」系統所衍生的亂子還不止此。前面說的「在別無其他方向系統可用的情況下，才可把觀察者的『前』、『後』、『左』、『右』，加於圖片之上」的原則，有時也會產生變異。例如我們會說「圖八的凳子在小樹的前方，女孩在小樹的右方」，顯然又不是直接把觀察者的「前後左右」系統平移至圖片上。這樣的說法，只有在觀察者倒立於小樹的位置，面向凳子，才會出現！



圖 八

在「東南西北」方向系統內，個體 A 處於個體 B 的方向，壓根兒不受觀察者的位置和面向影響。如果「 A 在 B 的北方」是對的，則不論面向，

對 A 和 B ，以至任何其他觀察者 C 而言，「 A 在 B 的北方」都是正確的說法。上述存在於「前後左右」系統的混亂，在此可算絕跡。因此，「東南西北」方向系統並沒有「前後左右」方向系統的先天缺陷，自然是嚴謹溝通的更佳選擇。

斜視圖

要運用「東南西北」方向系統，在圖畫中顯示方向，必須加入方向指示。最常見的，是在圖畫中加入一個「十」字，並標明「北」方。這個「十」字，是由兩條互相垂直的直線（段）組成，用以顯示四個主要方向。在俯視圖上（圖九），這做法簡潔清晰，不會引起疑惑。

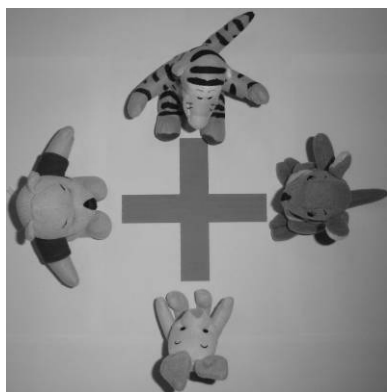


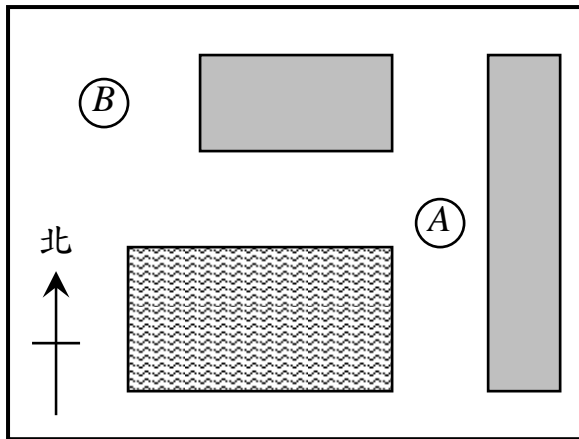
圖 九



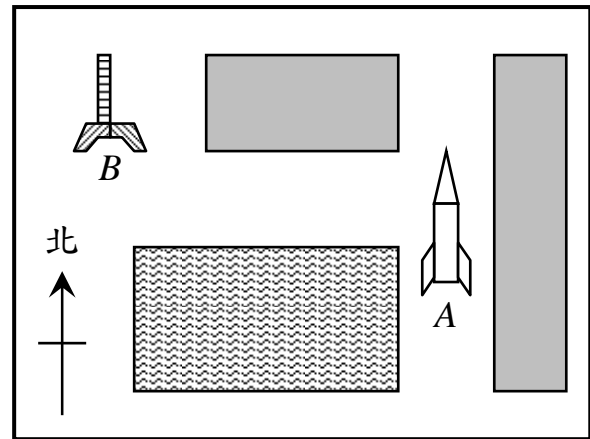
圖 十

可是，有時碰到的是斜視圖，方向標示便產生了變化：那個「十」字上的兩條直線（段）看起來不再是互相垂直（圖十）！這種現象，實為以平面畫像表達立體物件的必然結果。施教時，應適當地說明兩者（俯視圖和斜視圖）的分別。

又有些時候，俯視圖上的物體，卻不依正常方法表達。例如圖十一的 A 點是一台火箭， B 點是火箭發射台。本來兩者的側面，是不會在俯視圖看見的，但有時又有人把它們的側面刻意地顯示於俯視圖中（見圖十二）。除了讓人（特別是兒童）看得更形象化之外，也得小心留意會否令人誤答火箭頭的指向（向天還是向北？）之類的問題。



圖十一



圖十二

骨架方案

目前有些教材，引入「東、南、西、北」時均採用左右概念來說明，當中出現：「志華面向太陽升起的方向，志華的右面是___方，左面是___方（林、陳，2006，36 頁）」等句子。可是，部分學生對分辨左右也出現混淆，那麼怎可把一項新知識建立在一個不穩固的知識基礎上呢？加上前述有關「前、後、左、右」的一些先天缺陷，我們選擇以「順時針方向轉動」的說法定義東南西北之間的關係，這樣只需學生知道鐘面上由 1 至 12 出現的順序方向便可。這樣的佈局令新系統完全獨立於舊系統，亦即可以把舊的抹掉，以新的取而代之。從體會最初用容易產生混亂的前後左右指示系統，到運用東南西北四個主要方向描述，再到同時使用距離及四個方向去說明物件所在的位置，緊跟了數學化教學強調的主體內容遵循由無到有，由粗疏變精密的推演過程的要求（馮，2007）。

整個課題教學設計的骨架方案是這樣的：

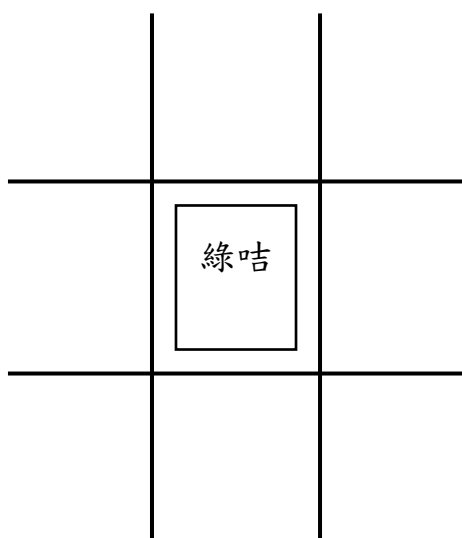
1. 帶出「前後左右」指示系統不足的地方。
2. 教師講解四個主要方向的其中之一後，便可由順時針旋轉一至三個直角，按東、南、西、北的順序，確定其餘的三個方向。
3. 語言表述，用「甲在乙的東方」表示甲相對乙的方向，強調方向描述必須包含兩個個體，不會出現「甲在東方」。
4. 可用四句等價語句：「甲在乙的東方」、「乙在甲的西方」、「甲的西方是乙」、「乙的東方是甲」，表示兩個個體之間的相對方向，亦可由任何一句轉換成另一句式。

5. 用畫圖方法解決思考性的相對方向問題。
6. 帶出要更準確表示物件的位置，就要同時使用方向及距離描述。
7. 認識斜視圖和俯視圖之分別。

要解答類似「甲在乙的東方，甲在丙的西方，丙在乙的哪一方？」的問題，一般小二學生都需要以圖畫輔助，以便理解題意。學生要先設定北方，然後考慮甲和乙可以怎樣放置，再根據所得圖畫回答問題。學生掌握這種思考模式後，他們便可透過圖示方式解釋類似「甲的北方是乙，乙的南方是丙，丙在甲的哪一方？」的問題的各種可能解答。

教學實踐

上述設計曾兩度於小二課堂試驗，效果理想。在引入這個課題前，先與學生進行一個四人小組活動，每組需按老師指示，將一張綠色咭紙放在白紙的正中央（圖十三），然後再將另一張橙色咭紙放在綠色咭紙的左面。在這個讓學生體會前後左右指示系統不足的活動中，大部分學生都能說出甲同學與乙同學的左方不同會引起爭論。其實，他們都有聽過「東南西北」，也知道太陽是「東升西落」。不過，他們大部分都沒有完整概念，例如他們知道從窗外看見太陽升起，這面是東方，見太陽走到另一面落下，那面就是西方，但他們就不知道南方和北方在哪兒。由此帶出四個主要方向，不只按照東南西北循環地順序出現，而且自任何一個方向順時針轉一個直角，便會到達下一個方向。



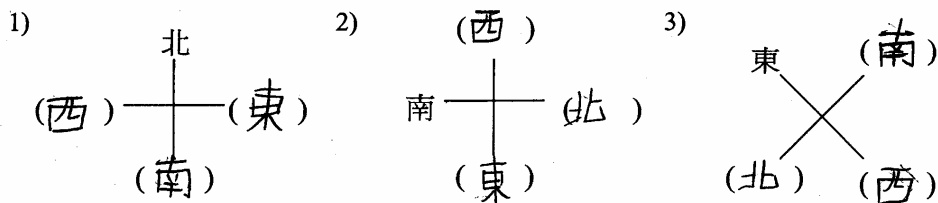
圖十三

透過一些要學生轉動身體面向各個方向的活動，讓學生感受到自己與這四個方向的关系（以自己作為中心，那四個方向就在自己的四周），以及學會從一個已知的方向，再確定出其餘三個主要方向。大部分學生經老師的示範及給予的回饋後，均能掌握數學獨特的思考方法和語言運用。曾有學生一邊手執工作紙（圖十四），一邊伸出手臂，然後順時針轉，逐一找出答案。部分學生做另一份工作紙時（圖十五），又會用兩隻食指造成「十」字，放在物件的中央，然後找出答案。

數學科

活動工作紙(二)

以下每個圖中只標有一個方向，試把其餘的三個方向寫出來。

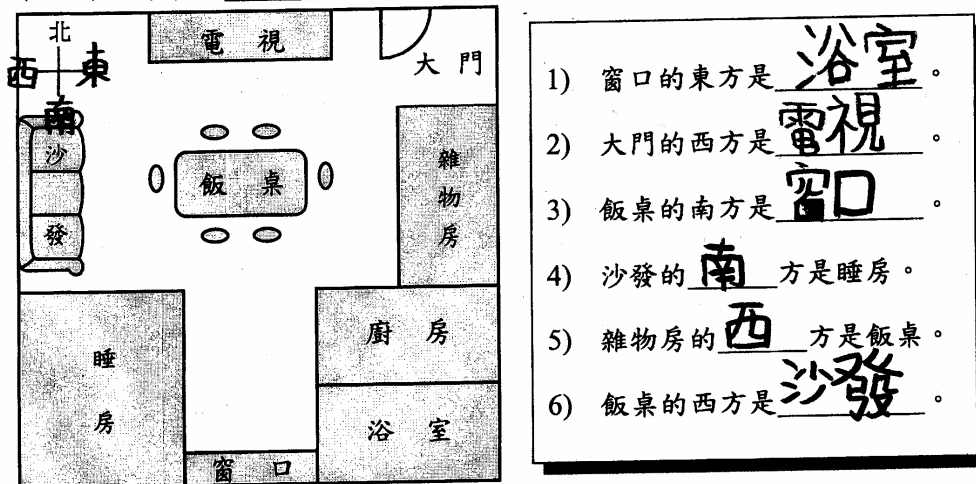


圖十四

數學科

活動工作紙(三)

把正確的案填在_____上。



圖十五

部分學生會較難掌握「A在B的北方」這種句式，所以必須強調以「的」前的個體作觀察中心，並要求學生多讀出句子。最重要一點是提出不可說成：「甲在東方」，在教學實踐中，有學生指出這是一句病句，並能指出這句子應包含兩個個體，如：「甲在乙的東方」。從學生完成的工作紙（圖十六）所見，學生都能運用四句等價語句，描述兩個個體之間的相對方向。

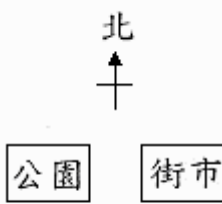
3) 試用四句不同的句子描述街市和公園的方向。

a) 街市的西方是公園。

b) 公園在街市的西方。

c) 公園的東方是街市。

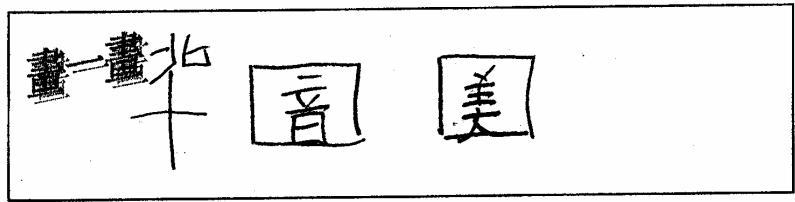
d) 街市在公園的東方。



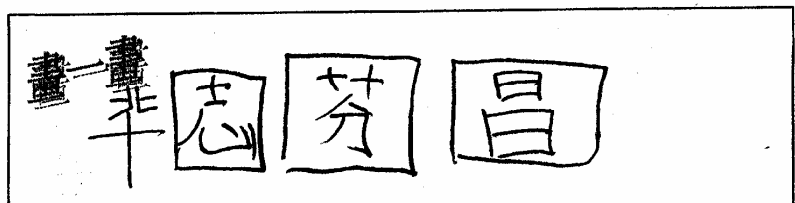
圖十六

此外，從其中一份工作紙（圖十七）觀察所得，大部分學生能以正確的圖示表達，並從而找出正確的答案，而在分組討論「A 在 B 的西方，C 在 B 的西方，A 在 C 的哪一方？」等問題時，學生能透過畫圖表達，解說為何不能確定個體的放置方法。

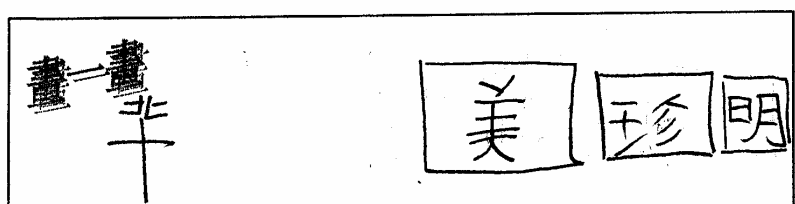
2) 音樂室的東方是美勞室，那麼音樂室在美勞室的西方。



3) 小昌的西方是小芬，小芬的西方是小志，小昌在小志的東方。



4) 小珍在小美的東方，小珍在小明的西方，小明在小珍的東方。



圖十七

由於只用東南西北表示個體所在的方向，而沒有說明距離，因此不能確定個體的位置。在課堂上，引入一個只知個體所在方向的情境，造成學

生不肯定物件位置的疑惑，從而帶出要同時使用方向及距離，才能準確表示個體的位置。

在課堂上向學生展示圖九和圖十兩幅圖片，學生能說出圖九是從上空拍攝，而圖十中那四隻布偶並沒有改變位置，只是從旁邊拍攝。他們也能指出在俯視圖中，布偶中央的圖案是「十」字形，但在斜視圖中，那個「十」字形將變成一個交叉，但卻不表示兩線相交成直角的事實有所改變。

結語

明眼的讀者會發現，這個單元的學習重點還包括認識及運用指南針。由於運用指南針只是一個技能的學習，以及將之前所學的內容應用到實際環境中，這部分被安排在這單元的後部分，實踐上比較獨立，亦不困難。上述的教學內容佔了這個單元的首四節教學時間，整個教學流程都能運作順暢，在教學時只需注意到，要讓學生有充份時間掌握那四句等價語句，表示兩個個體之間的相對方向。這一點貫徹數學化教學的九個關注項目之中，重視孕育適當數學語言一項，也是時常被忽略的一項。

其實，要求學生有效地完成課本中的習作並不困難，我們所花的功夫並不以此為最終目標。這個設計希望培養學生運用數學作為一門精確科學的獨特的思考模式解決問題，並體驗數學化觀點下，由粗疏到精密的過程，為將來學習一套較精密的八個主要方向留下伏筆。

參考資料

- 林秉明、陳卓堅（2006）。《廿一世紀現代數學(修訂版)》二下 A 冊。香港：現代教育研究社。
- 馮振業（2004）。〈數學化教學：理論、實踐與前瞻〉，載於 鄧幹明、黃家樂、李文生、莫雅慈（編）《香港數學教育會議—2004 論文集》，78 – 88 頁，香港大學教育學院。（後收入吳丹（編）（2007）。《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》，21 – 36 頁。香港：香港數學教育學會。）
- 馮振業（2007）。〈略述數學化教學的九大關注項目〉。載於梁志強、黎敏兒、潘建強、梁景信（編），《香港數學教育會議 2007 論文集》，152 – 164 頁。香港：香港數學教育學會。

作者電郵：cifung@ied.edu.hk