

小學的數據處理範疇到底教甚麼？

馮振業

香港教育學院數社科技學系

引言

從事數學教師培訓工作十多年，鮮有聽聞關於數據處理範疇的教學疑問。往好處想，就是教師都能順利完成教學，學生也學得輕鬆。近年多接觸了小學的數學課堂，翻過一些教材，更看過課程指引，隨即生起了不少疑問，開始懷疑是否也應該往壞處想想。本文就所見所聞作個整理，試就課程的學理佈置和教學實踐兩方面，檢視現時小學的數據處理範疇的教學中，有哪些正待解決的問題，並給予一些個人的意見。

課程的學理佈置

有一定經驗的教師，以至緊貼子女學業的家長，都知道自二年級開始，小學生每一學年都要學習統計圖。按課題類別分，就有下列七項：象形圖（二年級和五年級）、方塊圖（三年級）、棒形圖（四至六年級）、平均數（六年級）、折線圖（六年級）、幹葉圖（三年級增潤）和簡易概率（六年級增潤）（香港課程發展議會，2000）。看了如此這般的課程佈置，不禁要問：是否有必要於小學完成這些統計圖的學習？若是，這些課題的安放位置，又有何玄機？為甚麼方塊圖只學一次，象形圖就要學兩次，而棒形圖更要學三次？這些課題出現的次數，是反映學習內容的重要性，還是複雜性？曾經聽說，教師大都認為數據處理範疇的課題，最能讓學生於考卷中取分，於是要求課程年年都有統計圖。果真如是，課程的制訂未免有點兒戲了。

再細看各級的教學內容，就更能顯出庸材教育的特色：二年級要學「1 個圖形代表 1 個單位（29 頁）」的象形圖，五年級要學「1 個圖形代表 10 或 100 個單位（40 頁）」的象形圖；四年級要學「1 格代表 1、2、5 或 10 個單位（38 頁）」的棒形圖，五年級要學「1 格代表 50 或 100 個單位（42 頁）」的棒形圖，六年級要學「1 格代表 1000、10000 或 100000 個單位（44 頁）」的棒形圖。如果學習不能舉一反三，自然有需要把 1 格代表 1、2、5、10、50、100、1000、10000、100000 個單位等各學習一遍。可是，這又豈

不表示學生將不懂得 1 格代表 20 的棒形圖嗎？回看象形圖，又會想到在老師沒教授的情況之下，學生將不懂得 1 個圖形代表 2 個單位的象形圖。接著，又要想想為何只教「1 格代表 1 個單位（34 頁）」的方塊圖，而不必像棒形圖一樣，要教齊 1 格代表 1、2、5、10、50、100、1000、10000、100000 個單位的方塊圖？

另一個令人摸不著頭腦的課程元素，是六年級始介紹的平均值，卻在三年級的「觀察方塊圖，估計數據的平均值（34 頁）」和四年級的「觀察棒形圖，估計數據的平均值（38 頁）」中出現。有人說三年級的學生已學除法，自然知道平均值的意義。若然如此，六年級教授「計算一組數據之平均值（44 頁）」豈非多此一舉？難道在三、四年級時，儘管不懂得計算一組數據之平均值，單憑從除法的認識衍生出來的對平均值的意義的了解，便可做到「觀察方塊圖，估計數據的平均值」？除了知道平均值必在最大值和最小值之間外，還可以作出更準確的估計嗎？做了這樣的估計，不作計算，又如何得知它有多準確？

最後必須一提的是，關於簡易概率的內容。課程指引列出以下學習重點（見 49 頁）：

1. 初步體驗事情發生的可能性。
2. 用以下詞彙說出及解釋事情發生的可能性：
 - i. 一定
 - ii. 經常
 - iii. 偶然
 - iv. 很少
 - v. 不可能

這兒的所謂重點，真教人頭昏氣結！概率的研習，是爲了量化事件發生的可能性。如此以日常用語質化處理，還算是概率嗎？概率是一個 0 至 1 之間的數值，不作計算，無從談起。要體驗事情發生的可能性，只要生活就可以，何勞教師教授。概率的學習，就是要以比日常非學術用語更精密的概念，量化描繪這些生活經驗。這種以「事情」（日常用語）取代「事件」（術語），以日常用語形容取代計算的概率學習方式，是淡化數學的行爲，在課程改革浪潮之下，隨處可見（馮，2007b）。雖屬增潤項目，但如此和稀泥的學習內容，除了可以滿足比別人早一點學的虛榮心之外，實不知有何學習價值。

除卻估計平均值和簡易概率這些病入膏肓的課程元素之外，其餘的缺陷倒是可以理解和修補的。在探討一籃子問題之前，不妨先從數學角度考

慮以上眾多統計圖的學習，涉及哪些能力。象形圖是用圖畫的幅數按比例地表達離散數據的頻數，而棒形圖則是以棒條長度，按比例地表達離散數據的頻數。因比，象形圖沒有頻數軸，只有圖例說明 1 個圖形代表多少個單位，而棒形圖就有類別軸和頻數軸，卻沒有圖例。以下的象形圖（圖一）和棒形圖（圖二），就是由同一組離散數據造出：

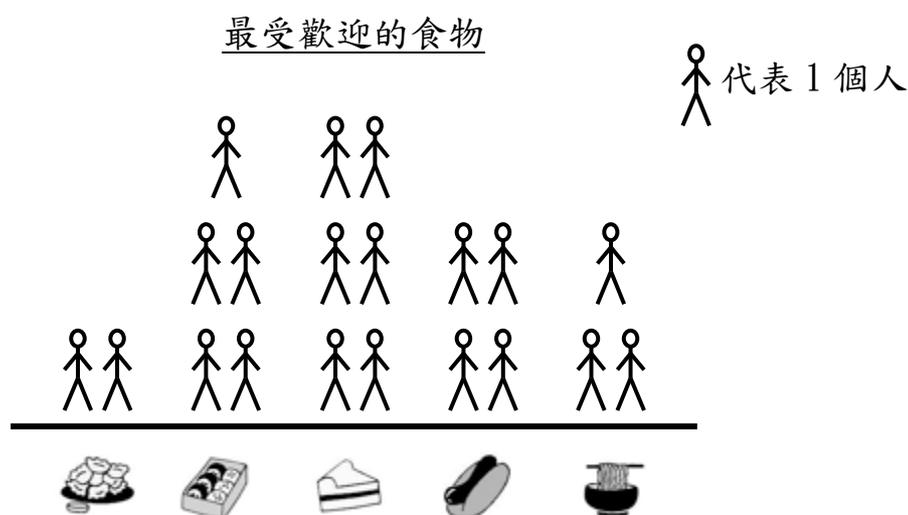


圖 一

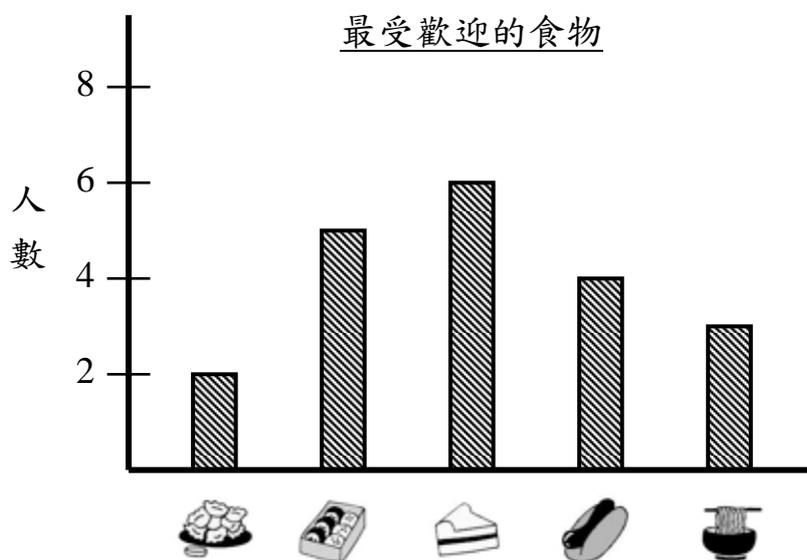


圖 二

當象形圖的圖形一個接一個地排成一條直線，並以相同大小的方塊模樣出現，就變成了方塊圖。如果把一串連成直線的方塊改成單一棒條，就得到棒形圖。換言之，從象形圖到方塊圖，再從方塊圖走向棒形圖，其實由以圖畫的幅數表達頻數，走向以棒條長度表達頻數。後者與高等數學慣

用的函數圖像的表達方法一致，是較成熟的數學表達方法。因此，這樣的推演過程照顧到知識累進的合理性，是一種認知進化的歷程，其間方塊圖只能算是跳板，充當著知識進化的中途站。有了這樣的理解，不難明白為甚麼方塊圖只學一次；棒形圖學習包括「認識縱軸及橫軸（38頁）」，而象形圖和方塊圖卻沒有。由此引伸的結論是，五年級再學象形圖的意義不大。因為於四年級已啟動了更成熟的棒形圖的學習，再回頭研習象形圖，活像已懂走路的小兒再次爬行一樣，令人沮喪。以相同的角度考慮幹葉圖的形成，只需把數據以表一的形式陳列，然後問如何可以減省書寫，又不失掉任何數據，表二的表達方法自然呼之欲出。

17	18						
22	22	23	23	24	25	27	29
30	30	30	32	32	34	36	
40	41	41	48	48	49		
50	50	53	55	55			
62	62						

表 一

1	7	8						
2	2	2	3	3	4	5	7	9
3	0	0	0	2	2	4	6	
4	0	1	1	8	8	9		
5	0	0	3	5	5			
6	2	2						

表 二

上面提到的以進化觀點考慮課程和教學，並不是甚麼新鮮事物。已故荷蘭數學教育泰斗弗賴登塔爾（Freudenthal）遠在 1973 年，便指出這是數學教育研究的主調，他稱這種認知進化過程為「數學化」過程（Freudenthal, 1973）。近年德國數學教育家維特曼（Wittmann）為此作了進一步的詮釋：他指出數學教育是一門系統進化的設計科學（Systemic Evolutionary Design Science），其中最重要的工作是設計和研究「內容豐富的學習環境」¹（Substantial Learning Environment）（Wittmann, 2001），讓學生從中經歷數學化過程。自 1997 年起，這種觀點已被引用於香港的課程構思和教學研究（馮，2007b），其中的基礎觀念見於馮（2004，2007a），此處從略。

以進化觀點考慮課程，特別重視學生的已有知識和經驗。由於多位數的認識要到五年級才告一段落（香港課程發展議會，2000），邏輯上令 1 格代表 1、2、5、10、50、100、1000、10000、100000 個單位的棒形圖不能在四年級一次過完成。如果課程設計不被「追求比別人早學」的幽靈主宰，

1 前譯作「堅實的學習環境」。

要理順課程架床疊屋的問題，大可在三年級引入象形圖，一口氣完成「1 個圖形代表 1、2、5、10 個單位」；四年級引入方塊圖，一口氣完成「1 格代表 1、2、5、10、50、100 個單位」；五年級引入棒形圖，一般地以棒條長度表示頻數（1 格代表多少個單位都可以）；六年級再教棒形圖，介紹複合棒形圖及其他變化形式。這樣的設計充分照顧到學生在數範疇的已有知識和課題演進的合理性，也突顯了棒形圖作為學理上較成熟、應用較廣泛的統計圖的重要性。

小學數據處理範疇的教學給人的印象，除了重複累贅之外，還是十分機械化。學不同的統計圖，就是學不同的一串機械化製圖步驟。這些工序，好像專為統計圖而設，與其他範疇的學習，似是毫無關連。其實，如果不把焦點放在統計圖，而改為把這些圖看成是組織思維的輔助工具或副產品，便會看到另一洞天。例如，要表示有 3 人，可以用圖三；表示有 30 人，除了可以用圖四，也可以用圖五。



圖 三



圖 四

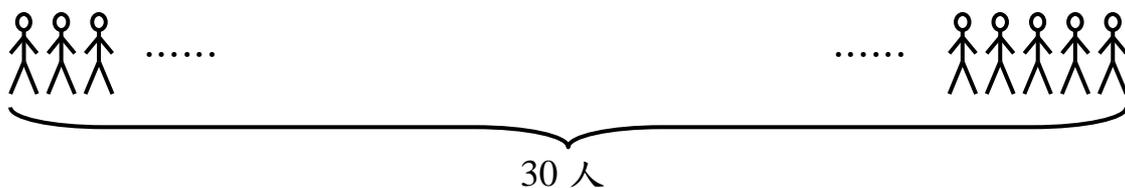


圖 五

如果小巴士站原有 9 人，巴士站原有 3 人。當巴士到站時，有 4 人從小巴士站跑到巴士站，用圖表示就是圖六和圖七。要找巴士到站時，哪個站的人較多，多了多少，這兩幅圖很可能是思考過程的產物，而它們的本質和象形圖並無分別。

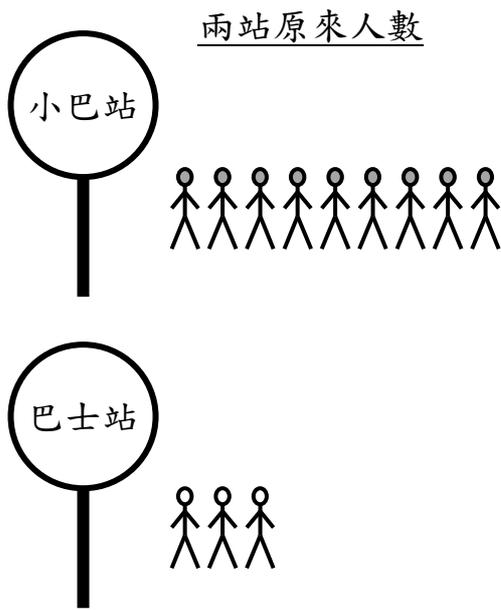


圖 六

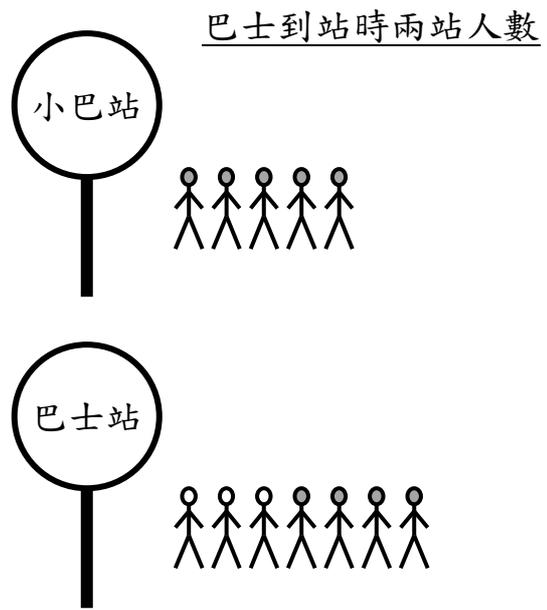


圖 七

當人數增加，以實數量圖畫顯示資料的意思會越見吃力，有必要尋求簡化畫圖的方法。例如把上面 9、3、4 三個數改為 30、12、19，畫實數量圖會很討厭，於是以下的進化版本出現（圖八、圖九）：

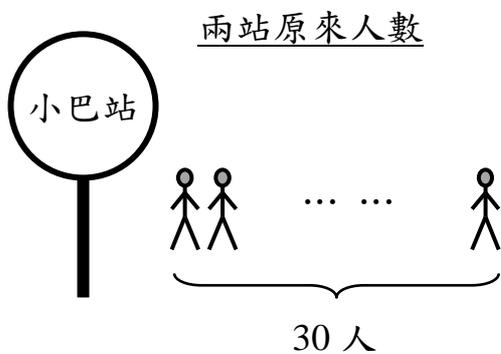


圖 八

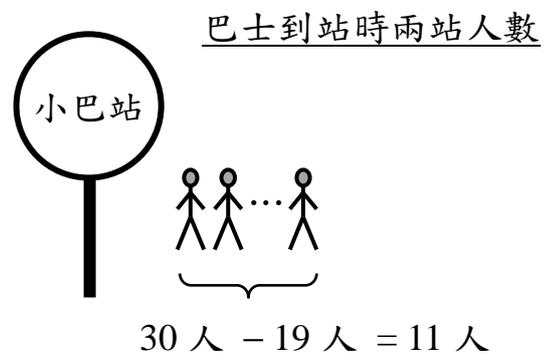


圖 九

誠然，很多教師都把算出答案放在第一考慮。既然大部分學生都能列出正確的式子，畫圖如果沒有本身的價值，自然是可做可不做了。不過，當學生碰到的並非前述的簡單問題，有否養成畫圖幫助思考的習慣，便可能是能否成功解題的關鍵。例如問題是這樣的：

小巴士原有人數較巴士站多 18 人。當巴士到站時，有 19 人從小巴士跑到巴士站。問巴士到站時，哪個站的人數較多，多了多少人？

懂得畫圖的自然會畫圖十和圖十一，順利找出答案。不畫圖的，也許會因為沒有一個人數是確知的而抓破頭顱。

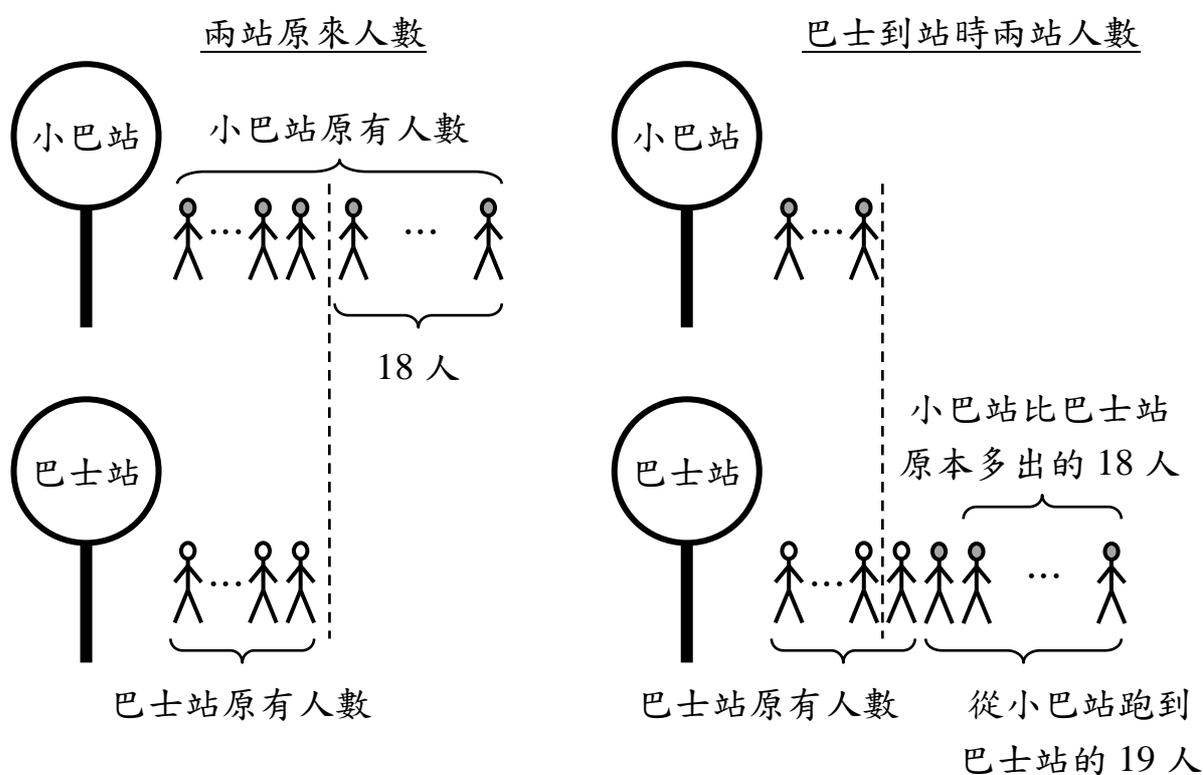
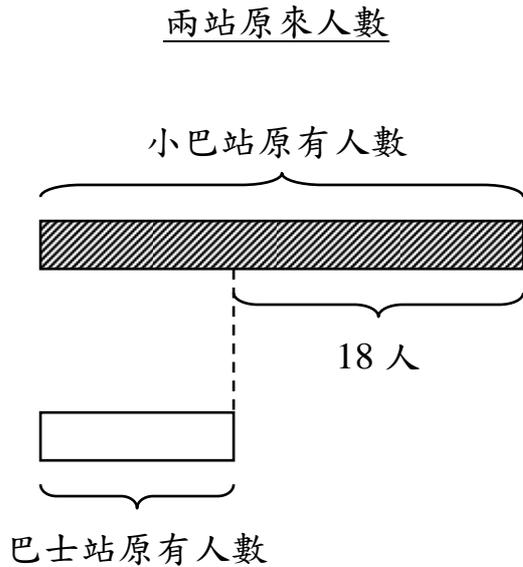


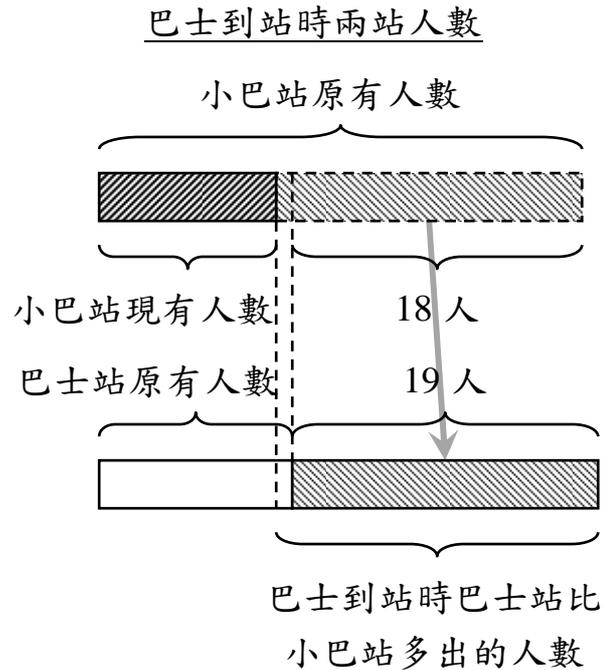
圖 十

圖 十一

隨著思考能力的提高，不再依賴圖畫的人可以用棒條或線段表示數量，圖十和圖十一會更進一步演變成圖十二和圖十三。雖然這些不是統計圖，但是它們的本質與棒形圖沒有分別。一言以蔽之，以棒條長度表達數值而已。這種工作手法，廣泛地應用於破解較複雜的算題，有稱之為解題策略的一種。然而，太陽之下無新事，這正好是二千多年前歐幾里得 (Euclid)，在《原本》(*Elements*)中用以分析和解釋數學問題的方法 (Heath, 1956)。



圖十二



圖十三

總括而言，以圖畫、線段或棒條長度表示數值，是一種強而有力的思考方式。用於統計圖，只是其中一種應用而已。如果數學課程有培育解難能力的元素，當學生熟習了畫圖思考，各種統計圖的教學實不用額外花上多少氣力，更可與其他學習經驗互相呼應。

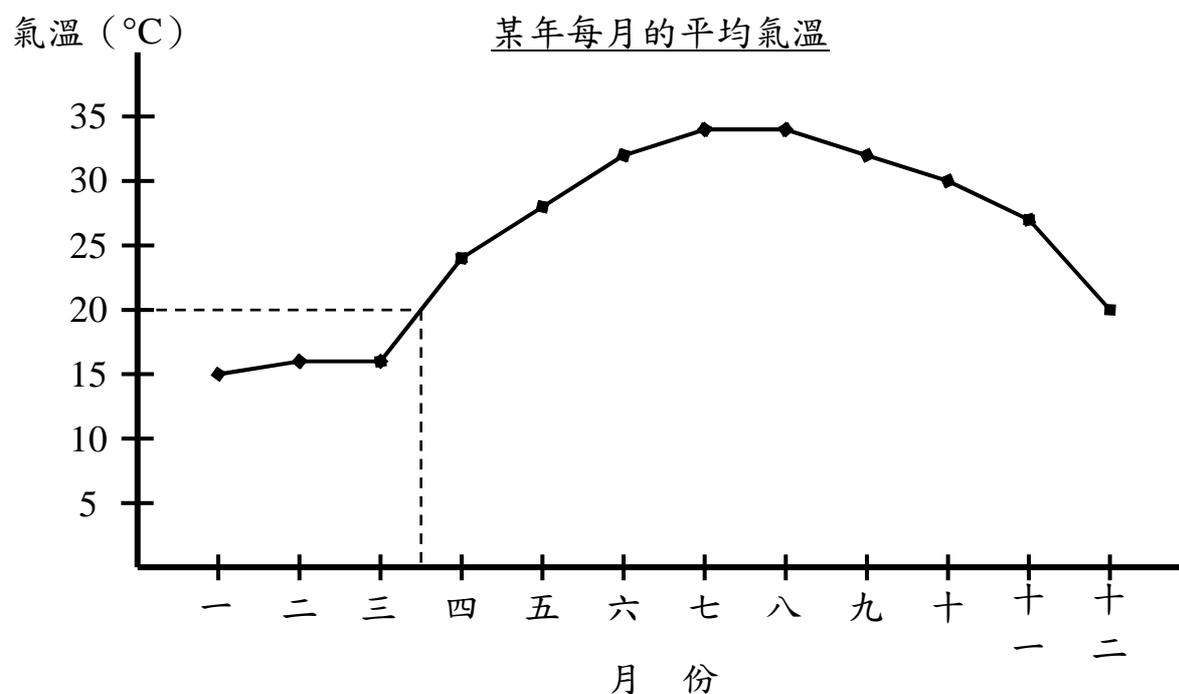
教學實踐

走訪一些課堂，所見的都是一大堆製作統計圖的步驟。師生都把注意力放在製圖的格式上：有否漏了標題？有否標示頻數軸？棒條是否等寬？棒條間是否等距？圖形是否每個大小相同？……少見的是，有關象形圖、方塊圖和棒形圖的異同的討論。不少課本和教師，都把象形圖和方塊圖的圖形排成直線，使象形圖、方塊圖和棒形圖三者的分別減到最少。其實正如上文所說，使用圖例而非頻數軸的象形圖和方塊圖，圖形可用圖一的方法放置，以顯示與棒形圖的分別。可能由於實際操作上的限制，很少見到製作象形圖時，會用上不足一個的圖形。甚至在讀圖練習中，含有不足一個圖形的象形圖也不多見。這種做法，雖可迴避一些麻煩，但卻可能令學生誤以為每次都必定用上整個圖形，有誤導之嫌。

在使用棒形圖展示頻數值較大的數據時，有些教師不理製圖範圍的大小，一律要求學生先把頻數捨入至整十、整百或整千，以克服格線不足時

的畫棒困難。有些教材甚至把頻數都設定在整十、整百或整千，連捨入的工作都省掉。雖然驟眼看來，這些旨在方便教師批改作業的處理手法並無大礙，但是卻已扭曲了棒形圖以棒條長度表達頻數的原意。試想，如果乘巴士的有 174 人，乘火車的有 166 人，不論捨入至整十或整百，造出的棒形圖豈不都顯示巴士和火車的乘客人數相同？爲了避過少許的畫棒麻煩，用上作假的數據，更是赤裸裸地示範不誠實的治學態度。其實，只要教師願意多放點時間批改作業，大可請學生在格線之間大約地畫出棒條的長度，當然教師便得檢視各棒的長短順序是否合理。今天有了科技的輔助，應用隨試算表而來的造圖程式，畫棒形圖只需幾次按鍵，值得引入課室。以 Excel 爲例，各式棒形圖兼備，只缺方塊圖和象形圖。如果不介意圖形只可排成直線，可向 Hunt (2000) 取經，不過要接受由棒形圖改回象形圖這個違反進化觀點的現實。

各種小學教授的統計圖之中，折線圖比較特別。它有兩條軸，其一（通常是橫軸）顯示有時序的變量，另一卻不一定顯示頻數，整個圖表示的是兩個變量的關係。簡單來說，它是一個函數的圖像，其中自變量是有時序的。嚴格來說，如果自變量並非連續，函數圖像應該只有散點，不會連成圖線。也就是說，縱然自變量有時序，如果不設定成連續，圖線還是不應該畫的，亦即沒有折線可言。要解釋這一點，先考慮圖十四：



圖十四

這折線圖是由 12 個點連出來的，其中的各個線段到底代表甚麼？圖中加入的虛線又可以怎樣理解？由於橫軸上的變量被設定成離散的，「三」和「四」之間的一點的意義並不清晰，導致以上面虛線讀圖，不能得出確切的意義。如果把圖意修改為「某年每月一日的平均氣溫」，則可按比例理解虛線指著的是三月一日與四月一日之間的哪一日，在縱軸上按虛線讀出的，就可被理解為當日的平均氣溫。當然，這也並不代表橫軸表示的真是連續變量，因為「三」和「四」之間實際只有 30 點是有確切意義的。要變成真正的連續變量，標題應該是類似「某年每月一日正午的氣溫」，因為圖中的 12 點只表示 12 個時刻的氣溫，而其他時刻的氣溫，則可以適當地按比例憑圖線讀出。嚴格來說，只有這種情況才可以把 12 點連成折線。不過，把要求放鬆一點，只要圖中虛線可以有合理的詮釋，畫成折線圖也可接受。目前常見的教材，只要橫軸有時序，一概都畫上折線，這未免太寬鬆了。要看趨勢，不一定要從折線上看的。如果硬要這樣做，也務必小心區分甚麼時候可以畫虛線讀圖，甚麼時候不可以。只要教師有這樣的觸覺，不論手執甚麼教材，也會如履平地，得心應手。

最後要提出的是，教師或教材有時會在製作統計圖後隨即以該圖進行讀圖練習。要知道拿著原始數據回答讀圖問題，有時會比從圖中讀出更快，這種叫製圖人讀圖的做法難免令人覺得無聊。此外，在現實世界裡，製圖和讀圖一般不會是同一群人。如果世人奸詐起來，製圖的人會別有用心，希望讀圖者得到某種印象，於是製圖者和讀圖者或會處於對立的局面：前者欲誤導後者，而後者則要避過誤導，看到製圖者不想人知的真相。因此，應避免自己製圖自己讀，以防角色矛盾。

參考資料

- 香港課程發展議會（2000）。《數學課程指引（小一至小六）》。香港：教育署。
- 馮振業（2004）。〈數學化教學：理論、實踐與前瞻〉，載於 鄧幹明、黃家樂、李文生、莫雅慈（編）《香港數學教育會議－2004 論文集》，78 - 88 頁，香港大學教育學院。（後收入吳丹（編）（2007）。《小學數學教育文集：理論與教學經歷的凝聚》，21 - 36 頁。香港：香港數學教育學會。）
- 馮振業（2007a）。〈略述數學化教學的九大關注項目〉。載於梁志強、黎敏兒、潘建強、梁景信（編），《香港數學教育會議 2007 論文集》，152 - 164 頁。香港：香港數學教育學會。

數學教育第二十六期 (6/2008)

馮振業 (2007b)。〈香港課程改革、《(非官訂) 香港數學課程》與「數學化教學」〉,《數學教育》, 25 期, 23 – 30 頁。

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Health, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's Elements, vol. 1 – 3*. New York: Dover.

Hunt, N. (2000). Pictograms in Excel. *Teaching Statistics* 22(2), 56 – 58.

Wittmann, E. Ch. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics* 48(1), 1 – 20.

作者電郵：cifung@ied.edu.hk