分數和小數互化定理的推廣

王劍　山東師範大學數學科學學院
胡錫娥　濟南中學

筆者在 2007 年第 24 期《數學教育》中曾經討論了一個分數和小數互化定理的推廣。在本文中，筆者將對另一個分數和小數互化的定理進行推廣，把它從 10 進制推廣到 n 進制的情形。

首先考察定理的 10 進制版本。

定理　設 $0 < a < b$，$(a , b) = 1$。則 $\dfrac{a}{b}$ 可以化爲純循環小數的充要條件是 $(b , 10) = 1$。

以上定理討論的是 10 進制這一特殊的情形，考慮一般 n 進制的情形，便得到下面的推廣定理。

定理　設 $0 < a < b$，$(a , b) = 1$。則 $\dfrac{a}{b}$ 可以化爲 n 進制純循環小數的充要條件是 $(b , n) = 1$。

證明　「必要性」

設 $\dfrac{a}{b} = 0.a_1a_2\ldots a_ta_1a_2\ldots a_t\ldots$，其中 a_1、a_2、…、a_t 祇要有一個不是零，兩邊乘上 n^t，得

$$\frac{an^t}{b} = a_1n^{t-1} + a_2n^{t-2} + \ldots + na_{t-1} + a_t + 0.a_1a_2\ldots a_ta_1a_2\ldots a_t\ldots$$。

令 $a_1n^{t-1} + a_2n^{t-2} + \ldots + na_{t-1} + a_t = q$，這就有 $\dfrac{an^t}{b} = q + \dfrac{a}{b}$，即 $a(n^t - 1) = bq$，由 $(a , b) = 1$，知 $b \mid (n^t - 1)$，於是 $(b , n) = 1$。

「充分性」

設 $(b\,,n)=1$，由歐拉定理，存在正整數 t，使得 $n^t \equiv 1 \pmod b$。

這就有 $b \mid (n^t-1)a$，即有 (*)：$an^t = bq + a$。

易知 $0 < q = (n^t-1)\dfrac{a}{b} < (n^t-1)$。

於是令 $q = a_1n^{t-1} + a_2n^{t-2} + \ldots + na_{t-1} + a_t$，其中 a_1、a_2、…、a_t 都是小於 n 的非負整數，但不全是零，也不全是 $n-1$。因此，$\dfrac{q}{n^t} = 0.a_1a_2\ldots a_t$（$n$ 進制小數），由 (*) 可以得到 (#)：$\dfrac{a}{b} = 0.a_1a_2\ldots a_t + \dfrac{a}{bn^t}$，反覆應用 (#) 便可得 $\dfrac{a}{b} = 0.a_1a_2\ldots a_ta_1a_2\ldots a_t\ldots$（$n$ 進制小數），證畢。

參考文獻

余元希等（1987）。《初等代數研究》。高等教育出版社。

楊世明等（2001）。《數學發現的藝術》。青島海洋大學出版社。

作者電郵：7676dyj@sina.com