萊布尼茲三角形

鄭浩鈞、曾朗生、蔡靜怡、劉穎欣、馮栢軒、王華峰
風采中學（教育評議會主辦）

前言

在許多數學書籍中，都提到古埃及的數學問題。其中，記載在蘭德紙草書（Rhind Papyrus）中的一個問題是把一個分數分解成兩個單位分數之和（Howard Eves, p.61; 1993），而單位分數就是指分子爲 1，分母是自然數的分數（柯召、孫琦；2003，頁 1）。單位分數由此進入我們研究的視線。在參考了柯召、孫琦的《單位分數》後，我們把研究範圍縮小到由單位分數構成的萊布尼茲三角形的構造和性質上，所謂萊布尼茲三角形是一個形如楊輝三角的數型。那麼，萊布尼茲三角形和楊輝三角之間有什麼關聯？它究竟如何構造？還能找到更多的關係式來表達它嗎？它又是否具備廣泛的應用性呢？

爲解決這些問題，本文首先利用楊輝三角中各數，定義一系列新的數（其中 n 和 r 爲非負整數），把這些數依序排列，便可構成萊布尼茲三角形。其後，由定義出發，證明了萊布尼茲三角形各數之間一個簡單的關係式，並由此引伸出一個應用於計算某些無窮級數和的猜想。此外，通過觀察，我們發現了萊布尼茲三角形各數之間的一個新的關係式，文章對這一發現做出了介紹和嚴格的證明。

從楊輝三角談起

現在讓我們從楊輝三角談起吧！楊輝三角又稱爲帕斯卡三角（Pascal Triangle），是大家所熟悉的由一系列特定的數字按規律排列而成的三角形態數型，如下圖所示（華羅庚；2003，頁 1 至 2）：

$$
\begin{array}{lcccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

第 n 行 $\quad \mathrm{C}_0^{n-1} \quad \mathrm{C}_1^{n-1} \quad \cdots \quad \mathrm{C}_{r-1}^{n-1} \quad \mathrm{C}_r^{n-1} \quad \cdots \quad \mathrm{C}_{n-2}^{n-1} \quad \mathrm{C}_{n-1}^{n-1}$

第 $n+1$ 行 $\quad \mathrm{C}_0^{n} \quad \mathrm{C}_1^{n} \quad \mathrm{C}_2^{n} \quad \cdots \quad \mathrm{C}_r^{n} \quad \cdots \quad \mathrm{C}_{n-2}^{n} \quad \mathrm{C}_{n-1}^{n} \quad \mathrm{C}_n^{n}$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

其中，$\mathrm{C}_r^n = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$，$n$ 和 r 爲非負整數，且 $r \le n$。

利用上述楊輝三角中各數，我們可以做如下的定義：

定義 對於任意非負整數 n 和 r，定義 $\mathrm{L}_r^n = \dfrac{1}{(n+1)\mathrm{C}_r^n}$，其中 $r \le n$。

由此計算出：

$\mathrm{L}_0^0 = \dfrac{1}{1}$，

$\mathrm{L}_0^1 = \dfrac{1}{2}$，$\mathrm{L}_1^1 = \dfrac{1}{2}$，

$\mathrm{L}_0^2 = \dfrac{1}{3}$，$\mathrm{L}_1^2 = \dfrac{1}{6}$，$\mathrm{L}_2^2 = \dfrac{1}{3}$，

$\mathrm{L}_0^3 = \dfrac{1}{4}$，$\mathrm{L}_1^3 = \dfrac{1}{12}$，$\mathrm{L}_2^3 = \dfrac{1}{12}$，$\mathrm{L}_3^3 = \dfrac{1}{4}$，

$\mathrm{L}_0^4 = \dfrac{1}{5}$，$\mathrm{L}_1^4 = \dfrac{1}{20}$，$\mathrm{L}_2^4 = \dfrac{1}{30}$，$\mathrm{L}_3^4 = \dfrac{1}{20}$，$\mathrm{L}_0^5 = \dfrac{1}{5}$，

…

把上述各單位分數依序排列成三角形形狀，立即可得：

萊布尼茲三角形（Leibniz Harmonic Triangle）（柯召、孫琦；2003，頁 76）

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \frac{1}{1} & & & & & & & \\
 & & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & & \\
 & & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & & \\
 & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & & \\
 & \frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7} & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & & &
\end{array}
$$

第 n 行 $\quad L_0^{n-1} \quad L_1^{n-1} \quad \cdots \quad L_{r-1}^{n-1} \quad L_r^{n-1} \quad \cdots \quad L_{n-2}^{n-1} \quad L_{n-1}^{n-1}$

第 n+1 行 $\quad L_0^{n} \quad L_1^{n} \quad L_2^{n} \quad \cdots \quad L_r^{n} \quad \cdots \quad L_{n-2}^{n} \quad L_{n-1}^{n} \quad L_n^{n}$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$

根據定義，萊布尼茲三角形每一個數均為單位分數。同時，由於 $C_0^n = C_n^n = 1$，故有：$L_0^n = L_n^n = \dfrac{1}{n+1}$，其中 n 為非負整數。

構成萊布尼茲三角形的一個簡單關係式

觀察萊布尼茲三角形，和楊輝三角不同的是，萊布尼茲三角形中每個數均可由其左下和右下兩個數之和計算出來，換言之，當規定了萊布尼茲三角形中最左側各數 $L_0^n = \dfrac{1}{n+1}$ 後，其餘各數便可由以下的公式計算出來。

命題 1 $\quad L_r^n = L_{r-1}^{n-1} - L_{r-1}^n$，其中 n 和 r 為任意自然數，且 $r \le n$。

證明　右式

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n\cdot C_{r-1}^{n-1}} - \frac{1}{(n+1)\cdot C_{r-1}^{n}} \\
&= \frac{1}{n\cdot \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}} - \frac{1}{(n+1)\cdot \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}} \\
&= \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!} - \frac{(r-1)!(n-r+1)!}{(n+1)!} \\
&= \frac{(n+1)(r-1)!(n-r)! - (r-1)!(n-r+1)!}{(n+1)!} \\
&= \frac{(r-1)!(n-r)![(n+1)-(n-r+1)]}{(n+1)!} \\
&= \frac{(r-1)!(n-r)!\times r}{(n+1)!} \\
&= \frac{r!(n-r)!}{(n+1)!}
\end{aligned}
$$

左式

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(n+1)\cdot C_{r}^{n}} \\
&= \frac{1}{(n+1)\cdot \frac{n!}{r!(n-r)!}} \\
&= \frac{r!(n-r)!}{(n+1)\cdot n!} \\
&= \frac{r!(n-r)!}{(n+1)!}
\end{aligned}
$$

∴　左式 = 右式

即　$L_r^n = L_{r-1}^{n-1} - L_{r-1}^{n}$，命題成立。

考慮當 $r = 1$ 時，命題 1 所得公式可化爲 $L_1^n = L_0^{n-1} - L_0^n$，若將其中的 n 分別取值爲 1、2、3、4、…、n 時，便可得到以下各式：

$$
\begin{aligned}
L_0^0 - L_0^1 &= L_1^1 \\
L_0^1 - L_0^2 &= L_1^2 \\
L_0^2 - L_0^3 &= L_1^3 \\
L_0^3 - L_0^4 &= L_1^4
\end{aligned}
$$

$$\cdots$$

$$\mathrm{L}_0^{n-1} - \mathrm{L}_0^{n} = \mathrm{L}_1^{n}$$

將上列各等式相加，立即可得：

$$\mathrm{L}_0^{0} - \mathrm{L}_0^{n} = \mathrm{L}_1^{1} + \mathrm{L}_1^{2} + \mathrm{L}_1^{3} + \mathrm{L}_1^{4} + \ldots + \mathrm{L}_1^{n}$$

即 $$\mathrm{L}_0^{0} = \mathrm{L}_1^{1} + \mathrm{L}_1^{2} + \mathrm{L}_1^{3} + \mathrm{L}_1^{4} + \ldots + \mathrm{L}_1^{n} + \mathrm{L}_0^{n}$$

可以想像，隨著 n 值逐一加大，且公式 $\mathrm{L}_1^{n} = \mathrm{L}_0^{n-1} - \mathrm{L}_0^{n}$ 不斷地被重複運用時，L_0^{0} 可以表達爲一個無窮級數和，即：

即
$$\begin{aligned} \mathrm{L}_0^{0} &= \mathrm{L}_1^{1} + \mathrm{L}_1^{2} + \mathrm{L}_1^{3} + \mathrm{L}_1^{4} + \ldots + \mathrm{L}_1^{n} + \mathrm{L}_0^{n} \\ &= \mathrm{L}_1^{1} + \mathrm{L}_1^{2} + \mathrm{L}_1^{3} + \mathrm{L}_1^{4} + \ldots + \mathrm{L}_1^{n} + \mathrm{L}_1^{n+1} + \mathrm{L}_0^{n+1} + \ldots \\ &= \mathrm{L}_1^{1} + \mathrm{L}_1^{2} + \mathrm{L}_1^{3} + \mathrm{L}_1^{4} + \ldots + \mathrm{L}_1^{n} + \mathrm{L}_1^{n+1} + \mathrm{L}_1^{n+2} + \ldots \end{aligned}$$

把相應的數字代入上式可得：

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \ldots$$

類似地，根據命題 1，

$$\mathrm{L}_r^{n} = \mathrm{L}_{r-1}^{n-1} - \mathrm{L}_{r-1}^{n}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \mathrm{L}_{r-1}^{n-1} &= \mathrm{L}_r^{n} + \mathrm{L}_{r-1}^{n} \\ &= \mathrm{L}_r^{n} + \mathrm{L}_r^{n+1} + \mathrm{L}_{r-1}^{n+1} \\ &= \mathrm{L}_r^{n} + \mathrm{L}_r^{n+1} + \mathrm{L}_r^{n+2} + \mathrm{L}_{r-1}^{n+2} \\ &= \mathrm{L}_r^{n} + \mathrm{L}_r^{n+1} + \mathrm{L}_r^{n+2} + \mathrm{L}_r^{n+3} + \ldots \end{aligned}$$

把這個過程不斷重複下去，不難得到以下的猜想：

猜想 $\mathrm{L}_{r-1}^{n-1} = \mathrm{L}_r^{n} + \mathrm{L}_r^{n+1} + \mathrm{L}_r^{n+2} + \ldots$，其中 n 及 r 爲自然數，且 $r \le n$。

一個新的命題

在定下以萊布尼茲三角形爲研究目標後，我們在研究它的結構的同時，通過細心的觀察，發現萊布尼茲三角形各數之間一個新的關係式。下面是我們的觀察及論證結果。

觀察　在萊布尼茲三角形裏，我們觀察到以下的一些關係式：

$$1\cdot \mathrm{L}_0^1\cdot \mathrm{L}_0^0=1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{2}=\mathrm{L}_1^1$$

$$1\cdot \mathrm{L}_0^2\cdot \mathrm{L}_0^0=1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}=\mathrm{L}_1^2\text{，}2\cdot \mathrm{L}_0^2\cdot \mathrm{L}_1^1=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}=\mathrm{L}_1^2$$

$$1\cdot \mathrm{L}_0^3\cdot \mathrm{L}_0^2=1\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}=\mathrm{L}_1^3\text{，}2\cdot \mathrm{L}_0^3\cdot \mathrm{L}_1^2=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}=\mathrm{L}_2^3\text{，}3\cdot \mathrm{L}_0^3\cdot \mathrm{L}_2^2=3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}=\mathrm{L}_3^3$$

…

$1\cdot \mathrm{L}_0^{n+1}\cdot \mathrm{L}_0^n=\mathrm{L}_1^{n+1}$，$2\cdot \mathrm{L}_0^{n+1}\cdot \mathrm{L}_1^n=\mathrm{L}_2^{n+1}$，$3\cdot \mathrm{L}_0^{n+1}\cdot \mathrm{L}_2^n=\mathrm{L}_3^{n+1}$，…，$r\cdot \mathrm{L}_0^{n+1}\cdot \mathrm{L}_{r-1}^n=\mathrm{L}_r^{n+1}$，…，$(n+1)\cdot \mathrm{L}_0^{n+1}\cdot \mathrm{L}_n^n=\mathrm{L}_{n+1}^{n+1}$

根據觀察所得的結果，我們提出以下的命題並加以證明。

命題 2　$r\cdot \mathrm{L}_0^{n+1}\cdot \mathrm{L}_{r-1}^n=\mathrm{L}_r^{n+1}$，其中 n 及 r 爲自然數，且 $r\le n$。

證明

$$\begin{aligned}\text{右式} &= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{(n-1+1)\cdot \mathrm{C}_{r-1}^{n-1}}\\ &= r\cdot\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}}\\ &= \frac{r\cdot(r-1)!(n-r)!}{(n+1)\cdot n\cdot(n-1)!}\\ &= \frac{r!(n-r)!}{(n+1)!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{左式} &= \frac{1}{(n+1)\cdot \mathrm{C}_r^n}\\ &= \frac{1}{(n+1)\cdot\dfrac{n!}{r!(n-r)!}}\\ &= \frac{r!(n-r)!}{(n+1)\cdot n!}\end{aligned}$$

$$= \quad \frac{r!(n-r)!}{(n+1)!}$$

$\therefore$ 左式 = 右式

即 $L_r^n = r \cdot L_0^n \cdot L_{r-1}^{n-1}$，命題成立。

結論

本專題研習的靈感源於古埃及的一個數學問題，由此引伸到由單位分數構成的萊布尼茲三角形上。這是一個類似於楊輝三角並和楊輝三角有緊密聯繫的數型，通過觀察和對兩者的比較，我們充分利用了嚴格的公式來描述萊布尼茲三角形。公式化的處理有利於進行嚴格的證明，也容易導出更多的猜想。我們就在這個基礎上開始考慮一個牽涉無窮級數和的一個猜想，由於它的論證必然牽涉無窮級數的收斂性，我們暫時無法證明，取而代之的是一個簡略的說明。

總的來說，在整個研習過程中，我們發覺萊布尼茲三角形是一個相當有趣的課題，相關的研究並不多見，但我們相信在本文建立的基礎和方向上繼續深入地探討下去，應該會有更多的結果湧現。

參考書目

柯召、孫琦（2003）。《單位分數》。智能教育出版社。

華羅庚。（2002）。《從楊輝三角談起》。科學出版社。

Howard Eves 著，歐陽絳譯（1993）。《數學史概論》。曉園出版社。

George Polya 著，九章出版社編輯部編譯（2000）。《數學發現》。九章出版社。

馮振業（1998）。單位分數的奧秘。《數學教育》，第七期，香港數學教育學會出版刊物。

作者電郵：ling_lin_w@yahoo.com.hk